

Recosages : 226, 223, 224, (230)

Exemple :  $\begin{cases} u_0 \in I = ]0, \frac{\pi}{4}] \\ u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n) \end{cases}$

Déterminons un développement asymptotique de  $(u_n)_{n \rightarrow \infty}$ .

.  $\text{Arctan}(]0, \frac{\pi}{2}]) = ]\text{Arctan}(0); \text{Arctan}(\frac{\pi}{2})] \subset ]0, \frac{\pi}{4}]$ , car  $\text{Arctan}$  est croissante sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$ .

.  $\text{Arctan}$  est concave donc :  $\forall x \in I, \text{Arctan}(x) \leq x$

Par récurrence, on montre que  $(u_n)$  est décroissante. Elle est de plus minorée par 0 donc elle converge. De plus,  $l = \text{Arctan}(l)$  donc  $l=0$

Méthode : Lorsque  $u_{n+1} = f(u_n)$ , que  $u_n \rightarrow 0$  et  $f(x) = x - Ax^2 + o(x^2)$  avec  $\alpha > 1$  et  $A > 0$ , on cherche un équivalent de  $u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$ .

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{\text{Arctan}^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2}$$

$$\begin{aligned} & (u_n - \frac{u_n^3}{3} + o(u_n^3))^2 \\ &= u_n^2 + \frac{u_n^4}{3} + o(u_n^2) \\ &= \frac{2}{3} u_n^2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{(u_n - \frac{u_n^3}{3} + o(u_n^3))^2} - \frac{1}{u_n^2}$$

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2} \left( \left( 1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2) \right)^{-2} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2} \left( 1 + \frac{2u_n^2}{3} + o(u_n^2) - 1 \right)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim \frac{1}{u_n^2} \times \frac{2u_n^2}{3} = \frac{2}{3}$$

Comme  $\sum \frac{2}{3}$  diverge, on a par sommation des relations de comparaison,  $\sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) \sim \frac{2n}{3} \rightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{2n}{3}$  car  $1 - \frac{u_n^2}{u_0^2} \sim \frac{2n}{3}$   
 i.e.  $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{2n}{3}$  donc  $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}$

On va maintenant pousser le développement limité de  $\text{Arctan}$  au voisinage de 0 un peu plus loin.



$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$-\frac{2 \times (-2-1)}{2} = -\frac{2 \times (-3)}{2} = 3$$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3}{3} + \frac{u_n^5}{5} + o(u_n^5)$$

$$u_{n+1} = u_n \left( 1 - \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^4}{5} + o(u_n^4) \right)$$

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2} \left( \left( 1 - \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^4}{5} + o(u_n^4) \right)^{-2} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2} \left( 1 + \frac{2u_n^2}{3} - \frac{2u_n^4}{5} + \frac{1}{3}u_n^4 + o(u_n^4) - 1 \right)$$

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{2}{3} - \frac{2u_n^2}{5} + \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{6}{15} - \frac{5}{15}$$

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{2}{3} - \frac{u_n^2}{15} + o(u_n^2) \quad \text{donc} \quad \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim -\frac{1}{15} u_n^2 = -\frac{1}{15}$$

Donc à nouveau par sommation :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2} - \frac{2n}{3} \sim -\frac{1}{15} \ln(n)$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = \left( \frac{2n}{3} - \frac{\ln(n)}{15} + o(\ln(n)) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2n}} \left( 1 - \frac{3}{20n} \ln(n) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2n}} \left( 1 + \frac{3}{40n} \ln(n) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)$$

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{3}\ln(n)}{40n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{6}}{80n\sqrt{n}} \ln(n) + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

Proposition : (Méthode générale) Soient  $b > 0$  et  $f: [0; b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- $f$  est continue, croissante, pour tout  $x \in ]0; b]$ ,  $f(x) < x$  et  $f(0) = 0$ .
- Il existe  $\lambda > 0$  et un réel et un réel  $r > 1$  tels que :

$$f(x) = x - \lambda x^r + o(x^r)$$

Pour tout  $c \in ]0; b[$ , la relation  $\begin{cases} u_0 = c \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $]0; b[$ , de limite 0, de

$$u_n \sim \frac{K}{n^{\frac{1}{r-1}}} \quad \text{où } K = (\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$$