

Différentielle du déterminant et éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale

Gourdon
Analyse

Recherches: 215, (219), 149

Proposition: Soit $B: E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire. Soit $(x, y) \in E \times F$. Alors B est différentiable en (x, y) et $dB(x, y)(h, k) = B(x, k) + B(h, y)$.

Preuve: $B(x, y) + (h, k) = B(x+h, y+k) = B(x, y) + B(x, k) + B(h, y) + B(h, k)$
Or, B est continue donc:

$$\exists C > 0, B(h, k) \leq C \|h\| \|k\| \leq C' \max(\|h\|, \|k\|)^2$$

Donc $B(h, k) = o(\|h, k\|)$ donc B est différentiable.

Proposition: L'application $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R}), d(\det)(M)(H) = \text{tr}(\text{com}(M)H)$.

Preuve: Soit $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$

$$\det(M + tE_{i,j}) = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & t + m_{i,i} & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & m_{i,i} & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & 0 & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & 0 & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$\det(M + tE_{i,j}) = \det(M) + t(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

Donc $\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(M) = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} = (\text{com}(M))_{i,j}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } d(\det)(M)(H) &= \sum_{i,j} H_{i,j} (\text{com}(M))_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{i,j} \text{com}(M)_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n (\text{tr}(\text{com}(M)H))_{i,i} \\ &= \text{tr}(\text{com}(M)H). \end{aligned}$$

Proposition: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\|_2 = \left(\sum_{i,j} m_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Preuve: On pose $f: M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \|M\|_2^2 = \text{tr}(M^T M)$. On souhaite minimiser f sous la contrainte $g(M) = 0$ avec $g(M) = \det(M) - 1$. f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$.

⊗ Ilq: $\forall y \in E \setminus F, \exists x \in F, d(y, F) = d(x, y)$.

Soit $y \in E \setminus F, d = d(y, F) > 0$. Soit $B = B(x, 2d)$. Par def, $\exists x \in F, d(x, y) \leq 2d$.
Donc $d(y, F) = d(y, F \cap B)$. $x \in F \cap B \rightarrow d(x, y)$ est contenue sur $F \cap B$ compact $\rightarrow$ atteint min

L'ensemble $S_m(\mathbb{R}) = g^{-1}(2d)y$ est un fermé de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ donc

$$\exists A \in S_m(\mathbb{R}), d(0, S_m(\mathbb{R})) = d(0, A) \stackrel{d}{=} d(0, F) = d(0, K)$$

i.e $\inf_{A \in S_m(\mathbb{R})} \|A\|_2 = \|A\|_2$

⊗ où $K = \{x \in F \mid \|x\|_2 \leq d\}$

Donc A est un minimum de f.

Or, $dg_A(H) = \text{tr}(H^t \text{com}(A)) = \text{tr}(H \det(A) A^{-1}) = \text{tr}(A^{-1} H) \neq 0$. (pas le bgr nulle)
Par le théorème des extrema liés,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, df(A) = \lambda dg(A)$$

Or, on a l'expression

$$f(A+H) = \text{tr}(^tAA) + 2\text{tr}(^tAH) + \|H\|^2$$

donc $df(A)(H) = 2\text{tr}(^tAH)$ et $dg(A)(H) = \text{tr}(^t \text{com}(A) H)$

donc pour tout $H \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $2\text{tr}(^tAH) = \lambda \text{tr}(^t \text{com}(A) H)$

$2\text{tr}(^tAH) - \lambda \text{tr}(^t \text{com}(A) H) = 0 \Rightarrow \text{tr}(2^tAH - \lambda^t \text{com}(A) H) = 0$
(donc en prenant $H = E_{ij}$, on a $2A = \lambda \text{com}(A)$ $\Rightarrow \text{tr}(2^tA - \lambda^t \text{com}(A)) = 0$)

Comme $A \in S_m(\mathbb{R})$, $\text{com}(A) = ^tA^{-1}$, donc $2^tAA = \lambda I_m$.

En prenant le det, on a $2^m = \lambda^m$ et comme tAA est positive, on $\lambda > 0$ donc $\lambda = 2$. Ainsi $^tAA = I_m$ et $A \in SO_m(\mathbb{R})$. $\langle ^tAA x | x \rangle = \langle A x | A x \rangle = \|Ax\|^2 = \|x\|^2$

Ainsi, le minimum de f sur $S_m(\mathbb{R})$ est forcément atteint en un point A de $SO_m(\mathbb{R})$. Le minimum vaut $\text{tr}(^tAA) = \text{tr}(I_m) = m$.

Réciproquement, tous les éléments $A \in SO_m(\mathbb{R})$ vérifient $f(A) = m$ d'où le résultat.