

$F: L^1 \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est à image dense. Montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset F(L^1(\mathbb{R}))$ en mg: $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ $\exists g \in L^1(\mathbb{R})$

Pour $g_n = \chi_{[-n, n]}$
calculer $\|g_n\|_1 \times g_n \rightarrow$ puis $\hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\hat{f}_n = \hat{f}_n = f_n$. $\|g_n\|_1 \rightarrow \infty$ Conclure le corollaire

Injectivité de la transformée de Fourier El Amrani Fanni
Recherches: 234, 250, 239 ($f_n = \hat{f}_n$)
244, 236 et $\|f_n\|_1 = \|\hat{f}_n\|_1 = 2$ d'appliquer avec

Proposition: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, F(x \mapsto e^{-bx^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\xi^2}{4b}} (b > 0)$

Preuve: Soit $g: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-bx^2}$ $g \in L^1(\mathbb{R})$ car continue et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ ($\frac{1}{x^2}$)

$$F(g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} e^{-ix\xi} dx \quad \text{on pose } h(x, \xi) = e^{-bx^2} e^{-ix\xi}$$

• $\xi \mapsto h(x, \xi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

• $\left| \frac{\partial h}{\partial \xi}(x, \xi) \right| = \left| -ix e^{-bx^2} e^{-ix\xi} \right| \leq |x| e^{-bx^2}$ intégrable indépendamment de ξ

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale,

$$F(g)'(\xi) = \frac{i}{2b} \int_{\mathbb{R}} -2bx e^{-bx^2} e^{-ix\xi} dx$$

$$F(g)'(\xi) = \frac{i}{2b} \left[\left[e^{-bx^2} e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} i\xi e^{-ix\xi} dx \right]$$

$$F(g)'(\xi) = -\frac{\xi}{2b} \int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} e^{-ix\xi} dx$$

$$F(g)'(\xi) = -\frac{\xi}{2b} F(g)(\xi)$$

Ainsi, $F(g)$ est solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) + \frac{t}{2b} y(t) = 0 \\ y(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \end{cases}$$

Soit y une solution, alors:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{t^2}{4b}} y(t) \right) &= \frac{t}{2b} e^{\frac{t^2}{4b}} y(t) + e^{\frac{t^2}{4b}} y'(t) \\ &= \frac{t}{2b} e^{\frac{t^2}{4b}} y(t) - e^{\frac{t^2}{4b}} y(t) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\exists C \in \mathbb{R}, e^{\frac{t^2}{4b}} y(t) = C$ i.e. $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = C e^{-\frac{t^2}{4b}}$

Or, $y(0) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$ donc $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{t^2}{4b}}$

Ainsi, $\forall \xi \in \mathbb{R}, F(g)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$

Proposition (Formule d'échange): Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(u) g(u) du = \int_{\mathbb{R}} f(v) \mathcal{F}(g)(v) dv$$

Preuve: Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(u) g(u) du = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itu} dt \right) g(u) du$$

Or, comme f, g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)| |g(u)| dt \right) du$ converge donc par le théorème de Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(u) g(u) du &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itu} du \right) g(u) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-itu} du \right) f(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \mathcal{F}(g)(t) dt \end{aligned}$$

Théorème: $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.

Preuve: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}f = 0$. Considérons le noyau de Gauss

$$\gamma_{\Delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} e^{-\frac{x^2}{2\Delta}}, \quad \Delta \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathcal{F}(e^{-\frac{b^2 x^2}{2}}) / 2 = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

Posons $g_{\Delta}: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{iax} \gamma_{\Delta}(x)$. On a: $\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2\Delta}}) = \sqrt{2\pi\Delta} e^{-\frac{\omega^2}{2\Delta}} = \sqrt{2\pi\Delta} e^{-\frac{\omega^2 \Delta}{2}} = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2 \Delta}{2}}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(u) g_{\Delta}(u) du = \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathcal{F}g_{\Delta}(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathcal{F}\gamma_{\Delta}(u-a) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathcal{F}\gamma_{\Delta}(a-u) du \quad (\text{par parité}) \\ &= f * \mathcal{F}\gamma_{\Delta}(a) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta}} f * \gamma_{\Delta-1}(a) \end{aligned}$$

Or, $\gamma_{\Delta-1}$ est une approximation de l'unité donc

$$f * \gamma_{\Delta-1} \xrightarrow[\Delta \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_1} f \quad \text{donc } \|f * \gamma_{\Delta-1}\|_1 \xrightarrow[\Delta \rightarrow +\infty]{} \|f\|_1 \quad \text{donc } \|f\|_1 = 0 \text{ i.e. } f=0$$

i.e. $\bar{f} = 0$