

Homéomorphisme de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$

(Galdiéro
Nouvelles notes
Tome I
Édition
Lem)

Recapitulés: 155, 157, 153

Lemme: Pour tout $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^T)}$
où ρ est le rayon spectral donné par $\rho(A) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_i|$

Preuve: On utilise la décomposition polaire: $A = OS$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,
 $S \in \mathcal{Y}_n^+(\mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|OS(x)\|_2 = \|S(x)\|_2$ donc $\|A\|_2 = \|S\|_2$. Comme S est symétrique
réelle, elle est diagonalisable dans une BNV $(v_1, \dots, v_n)$
ordonnée de sorte que les valeurs propres correspondantes sont
 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Maintenant, si $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ est de norme 1,
on a $\|S(x)\|_2 = \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i v_i\|_2 \leq \rho(S) = |\lambda_1|$, la borne étant
atteinte pour $x = v_1$.

On a donc l'égalité: $\|S\|_2 = \rho(S)$, ainsi:

$$\rho(S) = |\lambda_1| = \sqrt{\lambda_1^2} = \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{\rho(AA^T)}$$

Théorème: L'application $\exp: \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Preuve. Soit $S \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$. On peut écrire $S = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$
où $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a:

$$\exp(S) = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1} = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})^T P \in \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$$

car $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $e^{\lambda_i} > 0$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $\exp(\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Par restriction, elle reste continue.

Montrons la surjectivité. Soit $B \in \mathcal{Y}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a donc $B = P \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$
avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors, comme $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_i > 0$, $A = P \text{diag}(\ln(\mu_1), \dots, \ln(\mu_n)) P^{-1}$
est symétrique et on a $\exp(A) = B$, d'où la surjectivité.

Montrons l'injectivité. Supposons que $\exp(A) = \exp(A')$ avec
 $A, A' \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$. Soit Q un polynôme interpolateur de Lagrange tel
que: $\forall i, Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$. Alors A' commute avec $Q(\exp(A')) = Q(\exp(A)) =$

Par diagonalisation simultanée, on conclut que $A = A'$ donc $\exp$ est injective. $A' = P_0 \text{diag}(\lambda_i') P_0^{-1}$ et $A = P_0 \text{diag}(\lambda_i) P_0^{-1}$
 $\exp(A') = \exp(A) \Rightarrow \forall i, e^{\lambda_i'} = e^{\lambda_i} \Rightarrow \lambda_i = \lambda_i'$
 Montrons la continuité. Soit $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} = (\exp(A_p))_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E)$ qui converge vers $B = \exp(A) \in \mathcal{L}(E)$. Montrons que $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$.

(B_p) est bornée pour $\|\cdot\|_2$ - de même, par continuité de l'inverse, $B_p^{-1} \rightarrow B^{-1}$ donc (B_p^{-1}) est bornée pour $\|\cdot\|_2$.

Or, pour $\pi \in \mathcal{L}(E)$, on a $\|\pi\|_2 = \sqrt{\rho(\pi\pi^*)} = \sqrt{\rho(\pi^2)} = \rho(\pi)$

Donc tous les spectres de B_p sont majorés par une constante C . Or

$B_p^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Donc en appliquant le même raisonnement à B_p^{-1} les spectres de B_p sont minorés par C' .

Ainsi, toutes les valeurs propres des B_p sont contenues dans $K \subset \mathbb{C}$

Donc, les valeurs propres des matrices A_p sont contenues dans $[0, \infty)$

Ainsi, (A_p) est bornée pour $\|\cdot\|_2$. En dim° finie, les compacts sont fermés bornés.
 Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers $\tilde{A}$. Comme on a $\exp(A_p) = B_p$ pour tout k , on en déduit $\exp(\tilde{A}) = B = \exp(A)$
 Donc (A_p) n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Or, dans un espace de dimension finie, toute suite bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence converge vers cette valeur.

Si (u_n) ne converge pas vers l : $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ et $|u_n - l| \geq \varepsilon$

~~Soit~~ $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - l| \geq \varepsilon\}$ est infini (sinon il aurait un plus grand

Soit $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow A_\varepsilon$ str. $\uparrow$: $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\sigma(n)} - l| \geq \varepsilon$

Comme $u_{\sigma(n)}$ est bornée, par B-W,

$\exists \sigma': \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $u_{\sigma(\sigma'(n))} \rightarrow l$ vers l'IR

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\sigma(\sigma'(n))} - l| < \varepsilon$ d'où $|l' - l| > \varepsilon$, d'où $l' \neq l$.

Donc $u_n \rightarrow l$.

Plus simplement :

$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p > N, |u_p - l| \geq \varepsilon$

On pose $\ell(0) = 0$, $p = \ell(1) > \ell(0)$, $|u_{\ell(1)} - l| \geq \varepsilon$

Pour $\ell(2) \leftarrow \ell(p)$ construits, $N = \ell(n)$, $p = \ell(n+1) > N$, $|u_p - l| \geq \varepsilon$