

Connexité de $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{C})$ (Rombaldi)

Recapitulés: 204, 106, 162

Notations: $(E_{ij})_{i,j \in [1,n]}$ base de $\mathcal{M}_n(K)$. Une matrice de transvection est une matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$. ($\lambda \in K$).
Une matrice de dilatation est une matrice de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$.
- La multiplication à gauche (resp. à droite) par $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne i (resp. la colonne i) par λ .
- La multiplication à gauche (resp. à droite) par $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de ~~multiplier~~ remplacer la ligne i par $L_i + \lambda L_j$ (resp. la colonne i par $C_i + \lambda C_j$).

Théorème: Toute matrice A de $GL_n(K)$ s'écrit $A = \prod_{k=1}^n P_k D_m(\lambda) \prod_{j=1}^n Q_j$ où $P_1, \dots, P_n$ et $Q_1, \dots, Q_n$ sont des matrices de transvection et $\lambda = \det(A)$.

Par récurrence sur n

Preuve: Pour $n=1$, c'est clair

• On suppose le résultat acquis pour toutes les matrices inversibles d'ordre $n-1 \geq 1$ et on se donne $A \in GL_n(K)$.

→ Si $a_{1,1} = 0$, comme $A \in GL_n(K)$, sa colonne 1 n'est pas nulle, il existe donc $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ tel que $a_{i,1} \neq 0$ et la matrice $T_{i,1}(1)A$ est telle que son coefficient $(2,1)$ est non nul.

→ Dès lors, $a_{2,1} \neq 0$, on se ramène à $a_{2,1} = 1$ en remplaçant la ligne L_1 par $L_1 + \lambda L_2$ où λ est tel que $a_{1,1} + \lambda a_{2,1} = 1$.

→ $\forall i \in \{2, \dots, n\}$, on remplace L_i par $L_i - a_{i,1} L_1$ pour annuler le coeff $(i,1)$.

On peut donc trouver des matrices de transvection $P_1, \dots, P_n$ telles:

$$P_n \dots P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

De la même manière, en multipliant à droite par des matrices de transvection $Q_1, \dots, Q_m$, on obtient

$$P_n \dots P_1 A Q_1 \dots Q_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

La matrice est inversible d'ordre $n-1$: en effet si $B \in GL_{n-1}(K)$, il existe $x' \neq 0$, $Bx' = 0$ donc $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix} \in K^n$ est non nul et solution de $P_1 \dots P_r A x = Q_1 \dots Q_s x = 0$ d'où $Ay = 0$ avec $y = Q_1 \dots Q_s x \neq 0$ car les matrices P_i et Q_j sont inversibles $\rightarrow$ $\nexists$ avec A inversible. On applique l'hypothèse de récurrence à B et on obtient le résultat. $\rightarrow$ par induction $\rightarrow$ on a: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_{ij}(\lambda) & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} = T_{i+j,n}(\lambda)$

Remarque: Avec ce théorème, on obtient le fait que $SL_n(K)$ est engendré par les transvections.

Corollaire: Les groupes $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Preuve: Soit $A \in SL_n(K)$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Elle s'écrit $A = \prod_{k=1}^m P_k$ où les P_k sont des matrices de transvection. Pour toute matrice de transvection $T = T_{i,j}(\lambda)$ et tout $t \in [0,1]$, on note $T(t) = T_{i,j}(t\lambda)$ et on définit $\gamma: [0,1] \rightarrow SL_n(K)$ On a $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$
 $t \mapsto \prod_{k=1}^m P_k(t)$ γ est continue ~~car~~ T est continue.
 Donc $SL_n(K)$ est connexe par arcs.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Elle s'écrit $A = \prod_{k=1}^r P_k D_n(\det(A)) \prod_{j=1}^s Q_j$ où les P_k et Q_j sont des matrices de transvection. Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, il existe une application continue $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = \det(A)$.

L'application $\gamma: [0,1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$

$$t \mapsto \prod_{k=1}^r P_k(t) D_n(\varphi(t)) \prod_{j=1}^s Q_j(t)$$

est alors continue avec $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$. Donc $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \prod_{k=1}^r P_k D_n(\det(A)) \prod_{j=1}^s Q_j \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{produit par blocs}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_r & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_n(\det(A)) & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_s & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$$