

Théorème de Runge (Queffelec, topologie)

Recasages: ~~(203)~~, ~~204~~, ~~(205)~~, ~~(245)~~, ~~(241)~~, 243

Théorème: Soit K un compact de $\mathbb{C}$ de complémentaire connexe, soit $a \in \mathbb{C} \setminus K$. Alors $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est limite uniforme sur K de polynômes.

Preuve: $\overline{P(K)}$ est une sous-algèbre de $C(K)$. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus K$. On note $\varphi_a: z \in K \mapsto \frac{1}{z-a}$. On veut donc montrer que $\varphi_a \in \overline{P(K)}$. Posons $A = \{a \in \mathbb{C} \setminus K \mid \varphi_a \in \overline{P(K)}\}$.

① $A \neq \emptyset$: Soit $R = \sup \{|z| \mid z \in K\}$. Montrons que $|a| > R \Rightarrow a \in A$.
Supposons $|a| > R$.

$$\varphi_a(z) = -\frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$$

Comme $\left| \frac{z^n}{a^{n+1}} \right| \leq \left(\frac{R}{|a|} \right)^n \frac{1}{|a|} \quad \forall z \in K$, on a que cette série CVN sur K .

On pose $P_N(z) = -\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{a^{n+1}}$. $P_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \varphi_a$ donc $\varphi_a \in \overline{P(K)}$.

② A est fermé dans $\mathbb{C} \setminus K$: Pour cela montrons que $a \in \overline{A} \cap K^c \Rightarrow \varphi_a \in \overline{P(K)}$. On aura alors que $\overline{A} = A$.

Soit $a \in \overline{A} \cap K^c$. Soit $d = d(a, K) > 0$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^m$ telle que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ avec $\exists n_0, \forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \frac{d}{2}$.

$$\left| \frac{1}{z-a_n} - \frac{1}{z-a} \right| = \left| \frac{a_n - a}{(z-a_n)(z-a)} \right| \leq \frac{|a_n - a|}{\frac{d}{2} \times d}$$

$\hookrightarrow |z-a_n| = |z-a + a-a_n| \geq |z-a| - |a-a_n|$

D'où $\|\varphi_{a_n} - \varphi_a\|_\infty \leq \frac{2}{d^2} |a_n - a|$. Donc $\varphi_a \in \overline{P(K)}$ car $\varphi_{a_n} \in P(K)$ et $P(K)$ est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$.

③ A est ouvert dans $\mathbb{C} \setminus K$: Soit $a \in A$, $d = d(a, K) > 0$. Il suffit de montrer que $\overline{D}(a, \frac{d}{2}) \subset A$.

Soit $h \in \mathbb{C} \setminus K$ tel que $|h| \leq \frac{1}{2}$ et $z \in K$.

$$\frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{z-a} \frac{1}{1 - \frac{h}{z-a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{(z-a)^{n+1}}$$

On a que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{|h|^n}{|z-a|^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ donc cette série C.V.N. sur

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} h^n \varphi_a^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_{a+h} \in \mathbb{C}(K)$. Or, $\sum_{n=0}^{\infty} h^n \varphi_a^{n+1} \in \overline{P(K)}$ car $a \in A$ et $P(K)$ est une sous-algèbre. Donc $\varphi_{a+h} \in \overline{P(K)}$ d'où l'inclusion souhaitée.

Comme $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe et $A \neq \emptyset$ ouvert-fermé de $\mathbb{C} \setminus K$, on a donc que $A = \mathbb{C} \setminus K$ et donc $\forall a \in \mathbb{C} \setminus K$, φ_a est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Remarque. On a démontré le résultat suivant :

Si f est holomorphe au voisinage de K et $\mathbb{C} \setminus K$ connexe, alors $f|_K \in \overline{P(K)}$.