Endomorphismes semi-simples (Gourdon)

Recasages : 150, ~~151~~, (152), 122

Proposition : On pose $\pi_u = M_1^{\alpha_1} \cdots M_r^{\alpha_r}$. Si π_u est irréductible, alors u est semi-simple.

Preuve : On suppose que π_u est irréductible. Soit F un sev stable par u. Si $F = E$, on prend $S = \{0\}$.
Sinon, soit $x_1 \in E \setminus F$. On considère $E_{x_1} = \{P(u)(x_1), P \in K[X]\}$. Le sev E_{x_1} est stable par u. Montrons que $E_{x_1} \cap F = \{0\}$

Soit $I_{x_1} = \{P \in K[X] \mid P(u)(x_1) = 0\}$. C'est un idéal de $K[X]$ non réduit à $\{0\}$ car $\pi_u \in I_{x_1}$. Il existe $\pi_{x_1} \in K[X]$ unitaire tel que $I_{x_1} = (\pi_{x_1})$. Comme $\pi_u \in I_{x_1}$, on a $\pi_{x_1} \mid \pi_u$ et comme π_u est irréductible, $\pi_u = \pi_{x_1}$. Donc π_{x_1} est irréductible.

Soit $y \in E_{x_1} \cap F$. $\exists P \in K[X]$, $y = P(u)(x_1)$. Si $y \neq 0$, $P \notin I_{x_1} = (\pi_{x_1})$ donc $\pi_{x_1} \nmid P$ donc $\pi_{x_1} \wedge P = 1$. D'après Bezout,

$$\exists U, V \in K[X],\ UP + V\pi_{x_1} = 1 \text{ donc } x_1 = U(u) \circ P(u)(x_1) + V(u) \circ \pi_{x_1}(u)(x_1)$$
$$x_1 = U(u)(y).$$

Or, $y \in F$ et F est stable par u donc $x_1 = U(u)(y) \in F$. Or, $x_1 \notin F$ ↯
Donc $y = 0$ et $E_{x_1} \cap F = \{0\}$.

On a donc montré que E_{x_1} et F étaient en somme directe. Si $F \oplus E_{x_1} = E$, c'est terminé, sinon on choisit $x_2 \in E \setminus (F \oplus E_{x_1})$ et on recommence en remplaçant F par $F \oplus E_{x_1}$.
On itère ce procédé, on voit qu'au bout d'un nombre fini d'étapes ($\dim(E) < \infty$), on aura trouvé $x_1, \dots, x_k$ tels que $E = F \oplus E_{x_1} \oplus \cdots \oplus E_{x_k}$ et pour tout i, E_{x_i} est stable par u. Le sev $S = E_{x_1} \oplus \cdots \oplus E_{x_k}$ est donc stable par u et vérifie $F \oplus S = E$.

Ex : Semi-simple non diago $\Pi_u = X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$

$C_{X^4-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto$ reste de la division euclidienne de XP par X^4-1

Théorème : u est semi-simple si et seulement si $\Pi_u = M_1 \cdots M_r$ est produit de polynômes irréductibles unitaires distincts 2 à 2.

Dans K alg. clos
semi-simple $\Leftrightarrow$ diagonalisable

Preuve : "$\Rightarrow$" On suppose u semi-simple. Soit $\Pi_u = M_1^{\alpha_1} \cdots M_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs irréductibles de $K[X]$. Mq $\forall i$, $\alpha_i = 1$.
On suppose qu'il existe $i \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_i \geq 2$. Si $M = M_i$, il existe $N \in K[X]$, $\Pi_u = M^2 N$.

Soit $F = \ker(M(u))$. F est stable par u semi-simple donc il existe un supplémentaire S stable par u. Mq $MN(u)$ s'annule sur S.
Si $x \in S$, $MN(u)(x) \in F$ car $M(u)[MN(u)(x)] = \Pi_u(u)(x) = 0$
et $MN(u)(x) \in S$ car S est stable par u. Donc $MN(u)(x) \in F \cap S = \{0\}$ donc $x = 0$.
$MN(u)$ s'annule sur S et sur F car si $y \in F = \ker(M(u))$, alors $MN(u)(y) = N[M(u)(y)] = 0$. Comme $F \oplus S = E$, $MN(u) = 0$ ↯ avec minimalité du degré de Π_u.

"$\Leftarrow$" On suppose $\Pi_u = M_1 \cdots M_r$, M_i irréductibles unitaires deux à deux distincts. Soit F un sev de E stable par u. Pour tout i, notons $F_i = \ker(M_i(u))$. On a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ et $F = \bigoplus_{i=1}^{r} (F \cap F_i)$* → à savoir
$\forall i$, F_i est stable par u, on note $u_i = u_{|F_i}$. On a $M_i(u_i) = 0$ et M_i irréductible donc $\Pi_{u_i} = M_i$. Donc u_i est semi-simple.
Or, $F \cap F_i$ est stable par u_i, donc il existe un sev S_i stable par u tel que $(F_i \cap F) \oplus S_i = F_i$. Posons $S = \bigoplus_{i=1}^{r} S_i$

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i = \bigoplus_{i=1}^{r} [(F_i \cap F) \oplus S_i] = \left[\bigoplus_{i=1}^{r} (F_i \cap F)\right] \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} S_i = F \oplus S.$$

et S est stable par u. Donc u est semi-simple.

* p_i projection sur F_i // à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$, $p_i \in K[u]$ (Dunford).

F stable par $u \Rightarrow F$ est stable par p_i donc $p_i(F) \subset F$ et $p_i(F) \subset p_i(E) = F_i$
Donc $p_i(F) \subset F \cap F_i$ et $Id_E = p_1 + \cdots + p_r$ donc
$F \subset p_1(F) + \cdots + p_r(F) = p_1(F) \oplus \cdots \oplus p_r(F) \subset F_1 \cap F \oplus \cdots \oplus F_r \cap F$
[illegible] $\bigoplus F_i \cap F$