

Recapitulé: 213, 245, 239

Théorème: Soit ω un poids dans un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_a^b e^{\alpha|x|} \omega(x) dx < \infty$

Alors les polynômes orthogonaux associés à ω forment une base hilbertienne de $L^2([a, b[, \omega)$

Preuve: Soit $f \in L^2([a, b[, \omega)$ et supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, \langle f | x^n \rangle = 0$.
(P.N) base hilbertienne
 $\Leftrightarrow \text{Vect}(p_n, n \in \mathbb{N}) = H \Leftrightarrow \text{Vect}(x^n, n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}$

Considérons $\varphi: x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} f(x)\omega(x) & \text{si } x \in [a, b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

De plus, $\forall t \geq 0$, on a $t \leq \frac{1}{2}(1+t^2)$ donc:

$$\forall x \in [a, b[, |f(x)|\omega(x) \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\omega(x)$$

Comme ω et ωf^2 sont intégrables sur $[a, b[$, on en déduit que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Passons à présent:

$$\underline{g(z, x) = f(x)\omega(x)e^{-izx}}$$

Considérons la bande $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im}(z)| < \frac{\alpha}{2}\}$

Pour $z \in B_\alpha$, on a:

$$\int_a^b |g(z, x)| dx \leq \int_a^b e^{\alpha|x|/2} |f(x)|\omega(x) dx$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz:

$$(*) \int_a^b e^{\alpha|x|/2} |f(x)|\omega(x) dx \leq \left(\int_a^b e^{\alpha|x|} \omega(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2}$$

Considérons maintenant la fonction F définie par:

$$\forall z \in B_\alpha, F(z) = \int_a^b f(x)\omega(x)e^{-izx} dx = \int_a^b g(z, x) dx$$

L'inégalité (*) montre que F est bien définie et pour tout z tel que $|\text{Im}(z)| \leq \alpha$, on a:

$$|g(z, x)| \leq h(x) = e^{-\frac{|x|}{2}} |f(x)| \omega(x)$$

où $h \in L^1(\mathbb{R}; d\omega)$ d'après (*). Comme pour tout $z \in B_a$, la fonction $x \mapsto g(z, x)$ est mesurable et que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $z \mapsto g(z, x)$ est holomorphe sur B_a , le théorème d'holomorphicité sous l'intégrale montre que la fonction F est holomorphe sur B_a et que :

$$\forall z \in B_a, F^{(n)}(z) = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \omega(x) e^{-izx} dx$$

$$\text{Ainsi, on obtient } F^{(n)}(0) = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \omega(x) dx = (-1)^n \langle f, x^n \rangle = 0$$

L'unicité du DSE d'une fonction holomorphe montre que $F=0$ sur un voisinage de 0. Le théorème de prolongement analytique implique alors que $F=0$ sur l'ouvert connexe B_a tout entier et donc en particulier sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathcal{F}f=0$.

Comme $\mathcal{F}f$ est intégrable, l'injectivité de la transformation de Fourier implique $\mathcal{F}f=0$. Comme $\omega(x) > 0$, on en déduit que $f(x)=0$ pour presque tout x dans $\mathbb{R}$.

Remarque. $I =]0, +\infty[$, $\omega(x) = x^{-\ln(x)}$ est une fonction poids mais les polynômes orthogonaux associés à $L^2(I, \omega)$ ne forment pas une base hilbertienne.

→ Soit $f: x \in I \mapsto \sin(2\pi \ln(x))$. Montrons que f est orthogonale à tous les monômes $g_n(x) = x^n$.

$$\begin{aligned} \langle f | g_n \rangle &= \int_I x^n \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x)} dx \stackrel{y=\ln(x)}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2} dy \\ &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y-\frac{n+1}{2})^2} \sin(2\pi y) dy \stackrel{t=y-\frac{n+1}{2}}{=} (-1)^{n+1} e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sin(2\pi t)}_{\text{impaire}} e^{-t^2} dt = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Vect}(g_n)^\perp \neq \{0\}$ car contient f donc la famille des g_n n'est pas totale dans H . La famille des polynômes orthogonaux n'est donc pas totale non plus.

On détermine une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$:

On prend un poids sur $\mathbb{R}$: $\rho(x) = e^{-x^2}$. Les applications

$L^2(\mathbb{R}, \rho) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ sont des isométries bijectives linéaires $f \mapsto f\sqrt{\rho}$ l'une de l'autre. Les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \rho)$ et l'isométrie