

Théorème de Banach-Steinhaus et
série de Fourier divergente en 0

La
Rudin

Recherches: 208, 235 (246)

Théorème: Soit E un espace de Banach et F un evn quelconque.
Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires continues de
 E dans F telles que

$$\forall x \in E, C_x := \sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$$

Alors $C = \sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

En d'autres termes, si $\forall x \in E, \exists C_x > 0, \forall i \in I, \|T_i x\|_F \leq C_x \|x\|_E$
alors $\exists C > 0, \forall i \in I, \forall x \in E, \|T_i x\|_F \leq C \|x\|_E$

Preuve: Soit $E_n = \{x \in E \mid \forall i \in I, \|T_i x\| \leq n\} \quad \forall n \geq 1$

$$E_n = \bigcap_{i \in I} \{x \in E, \|T_i x\| \leq n\}$$

$\forall n \geq 1, E_n$ est un fermé comme intersection de fermés
et par hypothèse, $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Par le lemme de Baire dans E complet, $\exists N \geq 1, E_N^\circ \neq \emptyset$.

Soit $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tel que $B(x_0, r_0) \subset E_N$

$$x_0 + r_0 B(0, 1) \subset E_N$$

$$\forall y \in B(0, 1), x_0 + r_0 y \in E_N$$

Donc $\|T_i(x_0 + r_0 y)\| \leq N \quad \forall i \in I, \forall y \in B(0, 1)$

$$\text{Donc } \|T_i y\|_F \leq \frac{1}{r_0} (N + \sup_{i \in I} \|T_i x_0\|_F) \quad \forall y \in B(0, 1), \forall i \in I$$

$$\text{Ainsi, } \forall i \in I, \|T_i\| \leq \frac{1}{r_0} (N + \sup_{i \in I} \|T_i x_0\|)$$

$$\text{Donc } \exists C > 0, \sup_{i \in I} \|T_i\| \leq C.$$

Corollaire: Il existe une fonction $f \in C_{2\pi}$ telle que sa série de Fourier $S_n f$ diverge en 0.

Preuve: On pose $\mathcal{C}_n$ le sous-espace de $C([0, 1])$ telle que $f(0) = f(1)$
 $\forall f \in \mathcal{C}_n, \forall n \geq 0, S_n f = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e_k$ la n-ième somme partielle de Fourier de f , où $e_k = \exp(2\pi i k t)$

$\forall n \in \mathbb{N}, T_n: f \mapsto \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) = S_n f(0)$ - T_n est linéaire continue
 1) Soit $f \in \mathcal{C}_n$, soit $x \in [0, 1]$.

$$(T_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \underbrace{\sum_{k=-n}^n e^{-ikt}}_{D_n(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t) dt$$

Avec $D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$ et $|T_n(f)| \leq \|f\|_\infty \|D_n\|_1$
 donc $\|T_n\| \leq \|D_n\|_1$

On pose $f_m \in \mathcal{C}_n$, soit $m \mapsto \frac{|D_n(t)|}{|D_n(t)| + \frac{1}{m}}$: $\|f_m\|_\infty \leq 1$

Par le TCM, $|T_n(f_m)| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \|D_n\|_1$ donc $\|T_n\| = \|D_n\|_1$

$$\begin{aligned} \|D_n\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right| dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}} \right| dt \\ &\quad u = (2n+1)\frac{t}{2} > \frac{1}{2\pi} \int_0^{(2n+1)\pi} \left| \frac{\sin(u)}{u} \right| du \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin(u)}{u} \right| du \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(k+1)\pi} \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

Donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| = +\infty$

Par le théorème de Banach-Schaurs comme $\mathcal{C}_{2\pi}$ est complet pour $\|\cdot\|_\infty$, il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ tel que $T_n f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

$$T_n(f_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)| + \frac{1}{m}}}_{\text{suite croissante en } m} dt$$

qu'à CV vers $|D_n(t)| \rightarrow$ TCM