

Théorème de projection sur un convexe fermé Hirsch

Références: 213, 205, 219

Théorème: Soit H un espace de Hilbert. Soit C une partie non vide convexe fermée de H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C) = \inf \{ \|x - z\| \mid z \in C \}$.
On appelle y la projection de x sur C et on note $y = P_C(x)$.
On a la caractérisation suivante

$$y = P_C(x) \Leftrightarrow y \in C \text{ et } \forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0.$$

Preuve: Soit $x \in H$. Par définition de $\delta = d(x, C)$, il existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\delta^2 \leq \|x - y_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. (*)
Après l'identité du parallélogramme appliquée aux vecteurs $x - y_n$ et $x - y_p$ pour $n, p \geq 1$, on a:

$$\|x - \underbrace{\frac{y_n + y_p}{2}}_{\in C \text{ car } C \text{ convexe}}\|^2 + \|\underbrace{\frac{y_n - y_p}{2}}_{\in C}\|^2 = \frac{1}{2} (\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2)$$

$$\frac{1}{4} \|y_n - y_p\|^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right)$$

Donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans C fermé dans H complet donc C complet donc $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in C$. On passe à la limite dans (*):
on a $\delta^2 = \|x - y\|^2$ d'où $\delta = \|x - y\|$ d'où l'existence.

Unicité: On suppose qu'il existe y_1, y_2 tels que $\delta = \|x - y_1\| = \|x - y_2\|$.
L'identité du parallélogramme appliquée comme précédemment donne $\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$ donc $y_1 = y_2$.

"ii" On suppose $y = P_C(x)$. Alors $y \in C$. Soit $z \in C$. $\forall t \in [0, 1]$,
 $(1+t)y + tz \in C$ donc

$$\|x - (1+t)y - tz\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

$$\|x - y\|^2 + 2t \operatorname{Re}(\langle x - y, y - z \rangle) + t^2 \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

$$\operatorname{Re}(\langle x - y, y - z \rangle) \leq \frac{t}{2} \|y - z\|^2 \text{ on fait tendre } t \text{ vers } 0 \text{ et on obtient ce qu'on veut}$$

" $\Leftarrow$ " Supposons que $y \in C$ et $\forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle x-y | z-y \rangle) \leq 0$.
 Soit $z \in C$.

$$\begin{aligned} \|x-z\|^2 &= \|x-y+y-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x-y | y-z \rangle) \\ &= \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x-y | z-y \rangle) \end{aligned}$$

Donc $\|x-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$ d'où le résultat. ≥ 0

Proposition: Sous les mêmes hypothèses, on a:

$$\forall x_1, x_2 \in H, \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Preuve: Notons $y_1 = P_C(x_1), y_2 = P_C(x_2)$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\langle x_1 - x_2 | y_1 - y_2 \rangle) &= \operatorname{Re}(\langle x_1 - y_2 | y_1 - y_2 \rangle) + \operatorname{Re}(\langle y_2 - x_2 | y_1 - y_2 \rangle) \\ &= \operatorname{Re}(\langle x_1 - y_1 | y_1 - y_2 \rangle) + \|y_1 - y_2\|^2 \\ &\quad + \operatorname{Re}(\langle y_2 - x_2 | y_1 - y_2 \rangle) \\ &\geq \|y_1 - y_2\|^2 \end{aligned}$$

Par Cauchy-Schwarz, $\|y_1 - y_2\|^2 \leq \|x_1 - x_2\| \|y_1 - y_2\|$ et donc $\|y_1 - y_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$.