

Décomposition de Dunford Gourdon

Références: 152, 156, 154, 150, 142

Lemme Soit P un polynôme annulateur de u . On note $P = \beta \pi_1^{q_1} \dots \pi_s^{q_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles dans $K[x]$. Pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, on note $N_i = \ker(\pi_i^{q_i}(f))$. On a alors $E = \bigoplus N_i$ et pour tout i , la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f .

Preuve. La propriété $E = \bigoplus N_i$ résulte du lemme de décomposition des modules. Soit $i \in \{1, \dots, s\}$, on note $Q_i = \prod_{j \neq i} \pi_j^{q_j}$. Aucun facteur n'est commun à tous les Q_i donc ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'après Bezout,

$$\exists U_1, \dots, U_s \in K[x], U_1 Q_1 + \dots + U_s Q_s = 1$$

$$\text{d'où } Id_E = U_1(f) Q_1(f) + \dots + U_s(f) Q_s(f)$$

$$\forall i, \text{ on note } p_i = U_i \cdot Q_i \text{ et } p_i = p_i(f), \text{ on a donc } Id_E = \sum_{i=1}^s p_i(x)$$

De plus, pour tout $j \neq i$, P divise $Q_i Q_j$ donc

$$\forall j \neq i, p_i \circ p_j = Q_i Q_j(f) \circ U_i \cdot U_j(f) = 0 \quad (**)$$

On déduit de (**) que $\forall i \in \{1, \dots, s\}, p_i = \sum_{j=1}^s p_i \circ p_j$ et donc d'après (**)
 $p_i^2 = p_i$. Les p_i sont donc des projecteurs (appelés projecteurs spectraux)

Montrons que pour tout i , $\text{Im}(p_i) = N_i$. Soit $y = p_i(x) \in \text{Im}(p_i)$. On a

$$\pi_i^{q_i}(f)(y) = \pi_i^{q_i}(f) \circ p_i(f)(x) = U_i(f) \circ P(f)(x) = 0$$

$$\text{D'où } \text{Im}(p_i) \subset \ker(\pi_i^{q_i}(f)) = N_i$$

Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in N_i = \ker(\pi_i^{q_i}(f))$.

D'après (**), $x = \sum_{i=1}^s p_i(x)$. Or, $\forall j \neq i, p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$ car $\pi_i^{q_i} \mid Q_j$ donc $x = p_i(x) \in \text{Im}(p_i)$. Donc $\text{Im}(p_i) = N_i$.

Il reste à montrer que $\forall i, \ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$. Pour tout $j \neq i$, on a $N_j \subset \ker(p_i)$ car si $x \in N_j$, alors $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$ car $\pi_j^{q_j} \mid Q_i$.

D'où $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset \ker(p_i)$. Soit $x \in \ker(p_i)$

D'après (A), $x = \sum_{j \neq i} p_j(x)$ donc $x \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$. Ainsi, $\ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$

Ceci termine la démonstration car par construction les p_i sont des polynômes en f

Théorème: Soit $f \in L(E)$ tel que X_f est scindé sur K . Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que
 (i) d est diagonalisable, n est nilpotent
 (ii) $f = d + n$ et $dn = nd$

De plus, d et n sont des polynômes en f .

Preuve: Existence. On pose $X_f = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{a_i}$ et $\forall i \in [1, s], N_i = \ker(p_i)$. On applique le lemme car $P = X_f$ qui est annulateur et pour $N_i = \ker(p_i)$. Avec les notations précédentes, $p_i = P_i(f)$ est le polynôme minimal de f sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$.

* les p_i sont diag et commutent d'où 2 (car ce sont des poly en f) donc sont co-diag donc toute N_i des p_i est diag

Posez $d = \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i$, d est diagonalisable car $E = \bigoplus_{i=1}^s N_i$ et $n = f - d = \sum_{i=1}^s (f - \lambda_i Id) p_i$. $\forall i$, p_i est un projecteur et $p_i^2 = p_i$. De plus, les p_i commutent avec f , donc par récurrence sur q , on obtient que $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $n^q = \sum_{i=1}^s (f - \lambda_i Id)^q p_i$ car $p_i \circ p_j = 0$.

Or, si $q = \sup_i a_i$, on a $(f - \lambda_i Id)^q p_i = [(X - \lambda_i)^q P_i](f) = 0$ car $X_f \mid (X - \lambda_i)^q P_i$ donc $n^q = 0$. Ainsi construits, d et n sont des polynômes en f vérifiant (i) et (ii).

Unicité: Soit (d', n') un autre couple vérifiant (i) et (ii). Les d' et n' commutent avec $f = d + n$ donc avec f qui sont des polynômes en f . Ainsi, d et d' commutent donc sont co-diagonalisables. $d - d'$ est diagonalisable. De plus, $d - d' = n' - n$ est nilpotent (d'après (ii)) donc $d - d'$ nul donc $n = n'$ aussi.