Réduction de Jordan

Théorème: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$, où chaque ε_i est dans $\{0,1\}$.

Démonstration: Soit $r \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de u, de sorte que $u^{r-1} \neq 0$ et $u^r = 0$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $F_i = \ker u^i$.

- On va montrer que $\{0\} = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_{r-1} \subsetneq F_r = E$ et que, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, on a $u(F_i) \subset F_{i-1}$. La première partie découle de la définition de l'indice de nilpotence.

Soient $i \in [\![1,r]\!]$ et $x \in F_i$. On a $u^{i-1}(u(x)) = u^i(x) = 0$, donc $u(x) \in F_{i-1}$, ce qui donne $u(F_i) \subset F_{i-1}$.

- On va maintenant montrer qu'il existe des sous-espaces $G_1, \dots, G_r$ et $H_1, \dots, H_{r-1}$ de E tels que :
  (i) pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $F_i = G_i \oplus F_{i-1}$;
  (ii) $i \in [\![1,r-1]\!]$, u injecte G_{i+1} dans G_i ;
  (iii) $G_i = u(G_{i+1}) \oplus H_i$

  . On commence par construire G_r.

On fixe un supplémentaire G_r de F_{r-1} dans F_r, de sorte que $F_r = G_r \oplus F_{r-1}$.

On a $\ker u \cap G_r = (F_1 \cap G_r) \subset (F_{r-1} \cap G_r) = \{0\}$, donc u injecte G_r dans F_{r-1}.

$u(G_r) \subset u(F_r) \subset F_{r-1}$

On construit à présent $G_1, \dots, G_{r-1}$ et $H_1, \dots, H_{r-1}$ par récurrence descendante sur $i \in [\![1, r-1]\!]$.

- $i = r-1$: Soit $x \in u(G_r) \cap F_{r-2}$. On écrit $x = u(y)$, avec $y \in G_r$, et on a $0 = u^{r-2}(x) = u^{r-1}(y)$, donc $y \in G_r \cap F_{r-1} = \{0\}$, donc $x = 0$. Ceci donne $u(G_r) \cap F_{r-2} = \{0\}$.

On a donc $u(G_r) \oplus F_{r-2} \subset F_{r-1}$. On fixe alors un supplémentaire H_{r-1} de $u(G_r) \oplus F_{r-2}$ dans F_{r-1}, puis on pose $G_{r-1} = u(G_r) \oplus H_{r-1}$, de sorte que $F_{r-1} = G_{r-1} \oplus F_{r-2}$ et u injecte G_r dans G_{r-1}.

- Soit $i \in [\![1, r-2]\!]$. On suppose $G_{i+1}, \dots, G_r$ et $H_{i+1}, \dots, H_{r-1}$ construits.

On a $\ker u \cap G_{i+1} = (F_1 \cap G_{i+1}) \subset (F_i \cap G_{i+1}) = \{0\}$, donc u injecte G_{i+1} dans F_i.

$u(G_{i+1}) \subset u(F_{i+1}) \subset F_i$

Soit à présent $x \in u(G_{i+1}) \cap F_{i-1}$. On écrit $x = u(y)$, avec $y \in G_{i+1}$.

On a $0 = u^{i-1}(x) = u^{i}(y)$, donc $y \in F_i \cap G_{i+1} = \{0\}$, donc $x = 0$. On a donc $u(G_{i+1}) \oplus F_{i-1} \subset F_i$.

On fixe alors un supplémentaire H_i de $u(G_{i+1}) \oplus F_{i-1}$ dans F_i, puis on pose $G_i = u(G_{i+1}) \oplus H_i$, de sorte que $F_i = G_i \oplus F_{i-1}$ et u injecte G_{i+1} dans G_i. Ceci achève la récurrence.

On a donc construit les sous-espaces $G_1, \dots, G_r$ et $H_1, \dots, H_{r-1}$ vérifiant les conditions énoncées plus haut. En particulier, on a

$$E = G_r \oplus G_{r-1} \oplus \dots \oplus G_1$$
$$G_1 = F_1 = \ker u$$
$$\text{pour tout } i \in [\![2, r]\!], \ u \text{ injecte } G_i \text{ dans } G_{i-1}$$

• Si l'on se donne $i \in [\![2, r]\!]$ et $\varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,s_i}$ une base de G_i, alors $u(\varepsilon_{i,1}), \dots, u(\varepsilon_{i,s_i})$ est une famille libre de G_{i-1}, que l'on peut compléter par $\varepsilon_{i-1,1}, \dots, \varepsilon_{i-1,s_{i-1}}$ pour obtenir une base de G_{i-1}. On obtient le tableau suivant :

G_r	$e_{r,1} \ \cdots \ e_{r,s_r}$						
G_{r-1}	$u(e_{r,1}) \cdots u(e_{r,s_r})$		$e_{r-1,1} \cdots e_{r-1,s_{r-1}}$				
G_{r-2}	$u^2(e_{r,1}) \cdots u^2(e_{r,s_r})$		$u(e_{r-1,1}) \cdots u(e_{r-1,s_{r-1}})$		$e_{r-2,1} \cdots$		
$\cdots$							
G_1	$u^{r-1}(e_{r,1}) \cdots u^{r-1}(e_{r,s_r})$		$u^{r-2}(e_{r-1,1}) \cdots u^{r-2}(e_{r-1,s_{r-1}})$		$u^{r-3}(e_{r-2,1}) \cdots$		

En lisant ce tableau colonne par colonne, de bas en haut, puis de gauche à droite, on obtient une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E vérifiant $u(e_j) = e_{j-1}$ si e_j n'est pas sur la dernière ligne du tableau, et $u(e_j) = 0$ sinon. Ceci achève la preuve.

<u>Proposition</u> : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_s} \end{pmatrix}$,

où $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_s$ et, pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, $J_{p_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p_k}(\mathbb{C})$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note m_i la dimension de F_i. Alors les n_i sont entièrement déterminés par les m_i.

$$n_i = |\{k \in [\![1, s]\!] \,/\, p_k = i\}|$$

Démonstration : Il s'agit de remarquer que $\begin{cases} m_1 = n_1 + n_2 + \dots + n_r \\ m_2 = n_1 + 2n_2 + \dots + 2n_r \\ m_3 = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + 3n_r \\ \vdots \\ m_r = n_1 + 2n_2 + \dots + r n_r \end{cases}$.

Le résultat découle alors de l'inversibilité de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 \ddots & r \end{pmatrix}$.