Samuel

$\mathbb{C}$ algébriquement clos

Thm: Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est algébriquement clos.

dém: ① Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Quitte à remplacer P par $F = P\overline{P}$, on peut supposer $P \in \mathbb{R}[X]$

vieux: $\overline{F} = F$ donc $F \in \mathbb{R}[X]$ $\leftarrow$ (si $P = \sum a_\ell X^\ell$, alors $P\overline{P} = \sum b_\ell X^\ell$ avec

$$b_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} a_j \overline{a_{\ell-j}} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\ell} \left(\overbrace{a_j \overline{a_{\ell-j}} + \overline{a_j} a_{\ell-j}}^{\in \mathbb{R}}\right) \in \mathbb{R}$$)

en effet, si $F(x) = 0$, ou bien $P(x) = 0$

ou bien $\overline{P}(x) = 0$ donc $P(\overline{x}) = 0$.

- On peut aussi supposer P unitaire.

② Ecrivons le degré de P sous la forme $d = 2^n q$ avec q impair et $n \geq 0$.

Montrons par récurrence sur n: $(\mathcal{P}_n)$: Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $2^n q$ avec q impair admet une racine dans $\mathbb{C}$.

$\to (\mathcal{P}_0)$ est vraie, en effet, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré impair,

$$\left.\begin{array}{l} P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \\ P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \\ P \text{ est continue} \end{array}\right\} \text{ donc } P \text{ admet une racine réelle. (TVI)}$$

$\to$ Soit $\mathbb{K}$ une extension de $\mathbb{C}$ tel que P s'écrive $P = \prod_{i=1}^{d} (X - x_i)$ avec $x_i \in \mathbb{K}$.

Soit $c \in \mathbb{R}$.

Si $i \leq j$, on pose $y_{ij} = x_i + x_j + c x_i x_j \in \mathbb{K}$.

Il y a $\frac{d(d+1)}{2} = 2^{n-1}\left(q(d+1)\right) = 2^{n-1} q'$ avec q' impair.

Regardons $Q(X) = \prod_{i \leq j} (X - y_{ij})$

Les coefficients de Q s'expriment comme des polynômes symétriques élémentaires en les y_{ij} pour $i \leq j$.

Mais si τ ~~les~~ est la transposition (i, j) avec $i < j$, et Σ^k le $k^{\text{ème}}$ polynôme symétrique élémentaire en les y_{ij}, on regarde Σ^k comme un polynôme en $x_1, \dots, x_n$ et on a

$$\Sigma^k(x_1, \dots, \overset{i}{x_j}, \dots, \overset{j}{x_i}, \dots, x_n) = \Sigma^k(x_1, \dots, x_n), \text{ car seuls } \left.\begin{array}{l} y_{ij} \\ y_{ir} \\ y_{jr} \end{array}\right\} r \neq i, j \text{ sont permutés par } \tau \text{ mais}$$

$y_{ij}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = y_{ij}(x_1, \dots, x_n)$.

et $y_{ir}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = y_{jr}(\text{——}) \leftarrow$ uniquement

Si bien que Σ^k, et donc les coefficients de Q sont des polynômes symétriques en les x_i.

Ils s'expriment donc en fonctions des polynômes symétriques élémentaires en les x_i, noté

$$s_1 = x_1 + \dots + x_n \;, \dots,\; s_n = x_1 \dots x_n$$

En particulier, Q est à coefficients réels.

Q étant de degré $2^{n-1} q'$ avec q' impair, donc il existe $z_c \in \mathbb{C}$ racine de Q par hypothèse de récurrence

Il existe donc $i(c), j(c)$ tel que $\quad y_{i(c), j(c)} = x_{i(c)} + x_{j(c)} + c\, x_{i(c)} x_{j(c)} \in \mathbb{C}$

$\mathbb{R}$ étant infini, il existe c et c' distincts tel que

$$i(c) \underset{r}{\underset{\shortparallel}{=}} i(c') \text{ et } j(c) \underset{s}{\underset{\shortparallel}{=}} j(c')$$

Ainsi $x_r + x_s + c\, x_r x_s$ et $x_r + x_s + c' x_r x_s$ sont dans $\mathbb{C}$

donc $x_r + x_s$ et $x_r x_s$ aussi et donc x_r et x_s sont racines d'une équation du second degré

à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Ainsi $x_r, x_s \in \mathbb{C}$ et P a donc une racine dans $\mathbb{C}$.

(on connait les racines d'un polynôme de degré 2 à coefficient complexe).