Théorème de projection sur un convexe fermé :

I Le développement

Le but de ce développement est de montrer qu'il est possible de définir une projection sur un convexe fermé non vide d'un espace hilbertien $(H, < \cdot ; \cdot >_H)$.

Théorème 1 : [Hassan, p.489]
Soit C un convexe fermé non vide de $(H, < \cdot ; \cdot >_H)$ un espace hilbertien.
Pour tout $x \in H$, il existe un unique $c \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - c\|_H$ avec pour tout $z \in C$, $\operatorname{Re}(< z - c ; x - c >_H) \leq 0$.
De plus, en notant P_C la projection sur C, on a P_C 1-lipschitzienne (donc continue).

Preuve :
Soient C un convexe fermé non vide de $(H, < \cdot ; \cdot >_H)$ un espace hilbertien et $x \in H$.

$*$ Existence de c :
Par définition de $\delta = \inf \left\{ \|x - z\|_H^2 ,\ z \in C \right\}$, il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x - c_n\|_H^2 \leq \delta + \frac{1}{n}$.
Par l'identité du parallélogramme, on a pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\left\| x - \frac{c_n + c_p}{2} \right\|_H^2 + \left\| \frac{c_n - c_p}{2} \right\|_H^2 = \frac{1}{2} \left(\|x - c_n\|_H^2 + \|x - c_p\|_H^2 \right) \quad (*)$$

Donc :

$$\left\| \frac{c_n - c_p}{2} \right\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \left(\delta + \frac{1}{n} + \delta + \frac{1}{p} \right) - \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right)$$

Ainsi, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(H, \|\cdot\|_H)$ qui est complet, donc $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite $c \in C$ (car C est fermé). Donc en passant à la limite dans la première inégalité, on a $\|x - c\|_H^2 = \delta$.

$*$ Unicité de c :
S'il existe $c, c' \in C$ qui atteignent δ, alors on a d'après $(*)$: $\left\| \frac{c - c'}{2} \right\|_H^2 \leq 0$. Donc $\left\| \frac{c - c'}{2} \right\|_H^2 = 0$, soit $c = c'$ et on en déduit l'unicité.

$*$ Montrons la caractérisation du projeté :
On note c l'unique point de C tel que pour tout $x \in H$, $d(x, C) = \|x - c\|_H$.
Soit $z \in C$.
Pour tout $t \in]0; 1]$, $(1 - t)c + tz \in C$ (car C est convexe). On a alors :

$$\begin{aligned}
\|x - ((1 - t)c + tz)\|_H^2 \geq \|x - c\|_H^2 &\implies \|x - c + t(c - z)\|_H^2 \geq \|x - c\|_H^2 \\
&\implies \|x - c\|_H^2 + 2t \operatorname{Re}(< x - c ; c - z >_H) + \\
&\quad t^2 \|c - z\|_H^2 \geq \|x - c\|_H^2 \\
&\implies 2t \operatorname{Re}(< x - c ; z - c >_H) \leq t^2 \|c - z\|_H^2 \\
&\implies \operatorname{Re}(< x - c ; z - c >_H) \leq \frac{t}{2} \|c - z\|_H^2
\end{aligned}$$

Donc en faisant tendre t vers 0, on a $\operatorname{Re}(< z - c, x - c >_H) \leq 0$.

Réciproquement, supposons que $c \in C$ vérifie l'inégalité précédente.
On a alors pour tout $z \in C$:

$$\|x - z\|_H^2 = \|(x - c) + (c - z)\|_H^2 = \|x - c\|_H^2 + 2 \operatorname{Re}(< x - c ; c - z >_H) + \|c - z\|_H^2 \geq \|x - c\|_H^2$$

$*$ Montrons que P_C est 1-lipschitzienne :
Soient $x, x' \in H$ et on note $y = P_C(x)$ et $y' = P_C(x')$.
On a alors :

$$\|y - y'\|_H^2 = < y - y' ; y - y' >_H = < y - y' ; y - x >_H + < y - y' ; x - x' >_H + < y - y' ; x' - y' >_H$$

Or, on a $\operatorname{Re}(< y - y' ; y - x >_H) \leq 0$ et $\operatorname{Re}(< y - y' ; x' - y' >_H) \leq 0$ par le point précédent. De plus par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\operatorname{Re}(< y - y' ; x - x' >) \leq |< y - y' ; x - x' >_H| \leq \|y - y'\|_H \|x - x'\|_H$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\|y - y'\|_H^2 &= \operatorname{Re}\left(\|y - y'\|_H^2 \right) \\
&= \operatorname{Re}\left(< y - y' ; y - x >_H + < y - y' ; x - x' >_H + < y - y' ; x' - y' >_H \right) \\
&\leq \|y - y'\|_H \|x - x'\|_H
\end{aligned}$$

Donc $\|P_C(x) - P_C(x')\| \leq \|x - x'\|$ et ainsi P_C est 1-lipschitzienne (et donc continue).

■

II Remarques sur le développement

II.1 Pour aller plus loin...

Les hypothèses du résultat peuvent être modifiées en supposant que $(H, <\cdot;\cdot>_H)$ est un espace préhilbertien mais que le convexe C ait la propriété supplémentaire d'être complet. Cependant ces propriétés sont minimales !

Cependant, la projection sur le convexe C n'est pas linéaire ! Pour cela, il faut faire une projection sur un sous-espace vectoriel fermé. Enfin, on peut également modifier les hypothèses de ce théorème en supposant que $(H, <\cdot;\cdot>_H)$ est un espace préhilbertien mais que F soit en plus un sous-espace vectoriel complet (en particulier F de dimension finie). On obtient alors les résultats suivants :

Proposition 2 : [Hassan, p.489]
Soient F un sous-espace vectoriel de H, $x_0 \in H$ et $x \in F$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* $\|x - x_0\|_H = d(x, F)$.
* $x - x_0 \in F^\perp$ (autrement dit, pour tout $y \in F$, on a $< x - x_0, y >_H = 0$).

Théorème 3 : [Hassan, p.490]
Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $(H, <\cdot;\cdot>_H)$.
L'application $P_F : H \longrightarrow F$ est linéaire continue et telle que :
* P_F est une projection telle que $P_F \circ P_F = P_F$. * $\mathrm{Ker}(P_F) = F^\perp$ et $\mathrm{Im}(P_F) = F$.

Corollaire 4 : [Hassan, p.491]
Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H.
* On a $\overline{F}^\perp = F^\perp$, $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ et $H = \overline{F} \underset{\text{top.}}{\oplus} F^\perp$.
* F est dense dans H si, et seulement si, $F^\perp = \{0_H\}$.

Enfin, d'autres résultats qui découlent de la projection sur un sous-espace vectoriel sont le théorème de représentation des formes linéaires de Riesz ainsi que l'existence et l'unicité de l'adjoint.

II.2 Recasages

Recasages : 205 - 208 - 213 - 219 - 253.

III Bibliographie

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.