Théorème de Lévy et TCL :

I Le développement

Le but de ce développement est de démontrer le théorème de Lévy qui est très pratique pour étudier la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

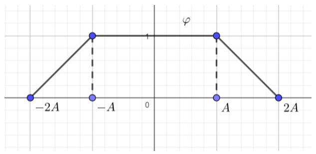
Dans tout ce développement, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X également une variable aléatoire réelle.

Lemme 1 : [Queffélec, p.542]
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Preuve :
$*$ Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, alors puisque toute fonction continue qui tend vers 0 à l'infini est bornée, on a directement le résultat.

$*$ Supposons que pour tout $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.
On considère $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que $\mathbb{P}(|X| \geq A) \leq \varepsilon$.

On pose $\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ la fonction valant 1 sur $[-A;A]$, 0 en dehors de $[-2A;2A]$ et affine sur $[-2A;-A]$ et $[A;2A]$.



On a alors :
$$\int_{\mathbb{R}} (1-\varphi(x))\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \leq \mathbb{P}(|X| \geq A) \leq \varepsilon$$
On écrit alors :
$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)\\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)(1-\varphi(x))\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x)}_{A_n} + \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)\right)}_{B_n}\\ &- \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)(1-\varphi(x))\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)}_{C}\end{aligned}$$

On a alors $|A_n| \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi(x))\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) = \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x)\right)$.
D'où :
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |A_n| \underset{\varphi\in\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})}{\leq} \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)\right) = \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-\varphi(x))\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \underset{hyp.}{=} \varepsilon \|f\|_\infty$$
De plus, on a par hypothèse que $|B_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $f\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$) et $|C| \leq \varepsilon \|f\|_\infty$.

On a alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)\right| \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$$
Ainsi, on a démontré l'équivalence entre les deux assertions.

■

Théorème 2 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :
On a équivalence entre :
$*$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
$*$ La suite $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.

Preuve :
$*$ On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
Puisque la fonction $x \longmapsto e^{itx}$ est bornée pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors directement que la suite $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.

$*$ Réciproquement, supposons $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.
Commençons dans le cas où f est de la forme $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\varphi(t)\mathrm{d}t$ avec $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.
Par les théorèmes de Fubini et de convergence dominée, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\varphi(t)\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathbb{E}\left(e^{itX_n}\right)\mathrm{d}t \quad \text{(Théorème de Fubini)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\mathrm{d}t \quad \text{(Théorème de convergence dominée)}\\ &= \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itX}\varphi(t)\mathrm{d}t\right) \quad \text{(Théorème de Fubini)}\\ &= \mathbb{E}(f(X))\end{aligned}$$
Maintenant, on considère $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$.
On sait qu'il existe $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$.
Or, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et donc par bijectivité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

on a que g s'écrit $g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\varphi(t)\mathrm{d}t$, avec $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ et on a donc :

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}\left(f(X_n) - f(X)\right)| &= |\mathbb{E}\left((f-g)(X_n) + (g(X_n) - g(X)) + (g-f)(X)\right)| \\ &\leq |\mathbb{E}((f-g)(X_n))| + |\mathbb{E}(g(X_n) - g(X))| + |\mathbb{E}((f-g)(X))| \\ &\leq 2\left\|f-g\right\|_\infty + |\mathbb{E}(g(X_n) - g(X))| \\ &\leq 3\varepsilon \text{ pour } n \text{ assez grand}\end{aligned}$$

On a ainsi démontré le théorème de Lévy.

■

Lemme 3 : [Queffélec, p.549]
Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes de limite $z \in \mathbb{C}$, alors on a $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n$ qui converge vers e^z quand n tend vers $+\infty$.

Preuve :
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes de limite $z \in \mathbb{C}$.
Comme la suite $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1, quitte à extraire, on peut supposer que ses termes n'appartiennent pas à la demi-droite $\mathbb{R}^-$. La détermination principale du logarithme vérifie : $\mathrm{Log}(1+z) \underset{0}{=} z + o(z)$, de telle sorte que :

$$\mathrm{Log}\left(1+\frac{z_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{z_n}{n} + o\left(\frac{z_n}{n}\right)$$

On peut alors écrire :

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^{n\,\mathrm{Log}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{z_n}{n}+o\left(\frac{z_n}{n}\right)\right)} = e^{z_n+o(z_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z$$

■

Proposition 4 : [Chabanol, p.44]
* On a $\Phi_X(0) = 1$.
* De plus, si X^k est intégrable pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors les dérivées à l'origine existent jusqu'à l'ordre k et $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}\left(X^k\right)$.
En particulier, $\Phi_X'(0) = i\mathbb{E}(X)$ et $\Phi_X''(0) = -\mathbb{E}\left(X^2\right)$.

Preuve :
* Par définition, on a :

$$\Phi_X(0) = \int_{\mathbb{R}} 1\mathrm{d}\mathbb{P}_X = 1 \text{ (car densité de probabilité)}$$

* Supposons que X^k est intégrable pour $k \in \mathbb{N}^*$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par $f(x,t) = e^{itx}$.
La fonction $t \longmapsto e^{itx}$ est k-fois dérivable, pour tout $\ell \in [\![1;k]\!]$, la dérivée ℓ-ième est $t \longmapsto i^\ell x^\ell e^{itx}$ et dont le module est borné par x^ℓ (indépendant de t).
En appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégrale à la fonction f et à la loi de X, on obtient par récurrence que la fonction Φ_X est k-fois dérivable et que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \Phi_X^{(k)}(t) = i^k\int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx}\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = i^k\mathbb{E}\left(X^k e^{itX}\right)$$

En particulier, on a à l'origine : $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}\left(X^k\right)$ et donc $\Phi_X'(0) = i\mathbb{E}(X)$ et $\Phi_X''(0) = i^2\mathbb{E}\left(X^2\right) = -\mathbb{E}\left(X^2\right)$.

On a donc démontré les relations voulues.

■

Théorème 5 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2.
Si l'on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} Z \text{ où } Z\sim\mathcal{N}_1(0,1)$$

Preuve :
On va montrer que $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle Z de loi $\mathcal{N}_1(0,1)$ et pour cela, on va utiliser le théorème de Lévy en montrant que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \mathbb{E}\left(e^{it\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left(e^{itZ}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Soit $\Phi(t) = \mathbb{E}\left(e^{it\frac{X_1-\mu}{\sigma}}\right)$ la fonction caractéristique de $Y_1 = \frac{X_1-\mu}{\sigma}$.
Puisque $Y_1 \in L^2(\mathbb{R})$, la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et on a $\Phi'(0) = i\mathbb{E}(Y_1) = 0$ et $\Phi''(0) = -\mathbb{E}(Y_1^2) = -1$ (formule de König-Huygens). De plus :

$$\mathbb{E}\left(e^{it\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{\frac{it}{\sqrt{n}}\frac{X_k-\mu}{\sigma}}\right) \underset{ind.}{=} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\frac{it}{\sqrt{n}}\frac{X_k-\mu}{\sigma}}\right) \underset{\text{i.d.}}{=} \left(\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Un développement de Taylor à l'origine de Φ montre qu'à t fixé :

$$\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\Phi'(0) + \frac{t^2}{2n}\Phi''(0) + \frac{\varepsilon_n}{n} = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ avec } \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a alors $\left(\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1+\frac{\varepsilon_n - \frac{t^2}{2}}{n}\right)^n$ et en appliquant le lemme précédent avec $z_n = \varepsilon_n - \frac{t^2}{2}$ qui tend vers $-\frac{t^2}{2}$, on obtient :

$$\left(\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}} = \mathbb{E}\left(e^{itZ}\right)$$

Ainsi, $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers Z par le théorème de Lévy et on a alors le résultat voulu.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

On a utilisé dans ce développement des résultats concernant la transformée de Fourier : bijectivité dans la classe de Schwartz, fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact denses dans $\mathcal{C}_0^0$ et appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On a aussi utilisé des résultats de théorie des probabilités tels que la fonction caractéristique du loi normale centrée réduite (dont la démonstration passe par le théorème de dérivation sous le signe intégral et la résolution d'une équation différentielle) ainsi que la notion de convergence en loi. C'est pourquoi on donne ci-dessous quelques rappels :

Définition 6 : Convergence en loi [Queffélec, p.542] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Définition 7 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\Phi_X : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \end{array}\right.$$

Remarque 8 : [Chabanol, p.43]
Ceci permet de voir la fonction caractéristique comme la transformée de Fourier de la loi de X (elle existe toujours car $\left|e^{itX}\right| = 1$ et $\mathbb{P}_X$ est une mesure bornée).
On en déduit de plus que Φ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 9 :
* Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\Phi_X : t \longmapsto 1 - p + pe^{it}$.
* Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\Phi_X : t \longmapsto \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
* Si X suit une loi de Poisson de paramètre μ, alors $\Phi_X : t \longmapsto e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}$.

II.2 Recasages

Recasages : 209 - 218 - 234 - 235 - 239 - 241 - 244 - 250 - 261 - 262.

III Bibliographie

— Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.

— Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.