Théorème de Banach-Steinhaus :

I Le développement

Le but de ce développement est de démontrer le théorème de Banach-Steinhaus et d'en donner une application aux séries de Fourier pour montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0.

Théorème 1 : Théorème de Banach-Steinhaus [Gourdon, p.424] :
Si $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ est un espace de Banach, alors pour toute famille $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que pour tout $x \in E$ on ait l'inégalité $\sup\{\|T(x)\|,\ T \in \mathcal{F}\} < +\infty$ on a $\sup\{\|\!|T|\!\|_{E,F},\ T \in \mathcal{F}\} < +\infty$.
En d'autres termes :

$$\exists C > 0 \text{ tq } \forall T \in \mathcal{F},\ \forall x \in E,\ \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

Preuve :
Supposons que pour tout $x \in E$, $\sup\limits_{T \in \mathcal{F}} \|T(x)\|_F < +\infty$ $(*)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\Omega_k = \left\{x \in E \text{ tq } \sup_{T \in \mathcal{F}} \|T(x)\|_F > k\right\} = \bigcup_{T \in \mathcal{F}} \{x \in E \text{ tq } \|T(x)\|_F > k\}$$

On a alors $\Omega_k = \bigcup_{T \in \mathcal{F}} \|T(\cdot)\|_F^{-1}(]k;+\infty[)$ est un ouvert (par continuité de T et de la norme $\|\cdot\|_F$).

Par $(*)$, $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k = \emptyset$, donc $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$ n'est pas dense dans E.
Ainsi, par la contraposée du lemme de Baire, il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que, $\mathcal{B}_o(x_0, r) \cap \Omega_k = \emptyset$.

Donc pour tout $x \in \mathcal{B}_o(0, r)$, on a :

$$\|T(x)\|_F = \|T(x + x_0) - T(x_0)\|_F \leq \|T(x_0 + x)\|_F + \|T(x_0)\|_F \leq 2k$$

Ainsi, pour tout $x \in E$ de norme 1, $\|T(x)\|_F = \dfrac{2}{r}\left\|T\left(\dfrac{r}{2}x\right)\right\|_F \leq \dfrac{4k}{r}$.

Finalement, on a $\|\!|T|\!\|_{E,F} \leq \dfrac{4k}{r} < +\infty$ et donc $\sup\limits_{T \in \mathcal{F}} \|\!|T|\!\|_{E,F} < +\infty$.

■

Corollaire 2 : [Gourdon, p.425]
Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0.

Preuve :
$*$ Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application :

$$T_N : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f) \end{array}\right.$$

L'application T_N est alors continue et linéaire. En effet, pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on a :

$$|T_N(f)| = \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t\right| \underset{I.T.}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N} e^{-int}\right||f(t)|\mathrm{d}t = \|D_N\|_1\|f\|_\infty$$

Et ainsi, $\|\!|T_N|\!\| \leq \|D_N\|_1$.

$*$ Montrons que l'on a en fait une égalité :
Posons, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'application :

$$f_m : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{D_N(t)}{|D_N(t)| + \frac{1}{m}} \end{array}\right.$$

On a alors $\|f_m\|_\infty \leq 1$ et par le théorème de convergence dominée, $|T_N(f_m)| \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \|D_N\|_1$, donc $\|\!|T_N|\!\| = \|D_N\|_1$.

$*$ Par parité de $|D_n|$ et avec la majoration $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{t}{2}$ valable pour tout $t \in [0;\pi]$ et un changement de variable, on a :

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\left|\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\right|}{\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u$$

Et comme la fonction $u \longmapsto \frac{\sin(u)}{u}$ n'est pas intégrable en valeur absolue sur $[0;+\infty[$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin(u)}{u}\right|\mathrm{d}u \geq \frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin(u)|\mathrm{d}u = \frac{2}{n\pi}$$

Ainsi :

$$\int_0^{N\pi}\left|\frac{\sin(u)}{u}\right|\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin(u)}{u}\right|\mathrm{d}u \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On en déduit donc que $\|D_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, on a $\sup_{N\in\mathbb{N}^*} \{|||T_N|||\} = +\infty$ et donc puisque $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ est complet, on a par la contraposée du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ tel que $(T_N(f))_{N\in\mathbb{N}^*}$ diverge, c'est-à-dire tel que la série $\left(\sum_{k=-N}^{N} c_n(f)e^{in0}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ diverge.

Finalement, il existe bien une fonction continue et 2π-périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans ce développement, on s'est appuyé sur le lemme de Baire dont on rappelle l'énoncé ainsi que la preuve ci-dessous :

Lemme 3 : Lemme de Baire [Gourdon, p.417] :
Soit X un espace métrique complet.
Toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est dense dans X.

Preuve :
Soit X un espace métrique complet.
On fixe une famille d'ouverts denses $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X et un ouvert V non vide de X. Nous allons montrer que l'intersection de V et des O_n n'est pas triviale.

On commence par construire par récurrence une suite décroissante de boule fermé $(\mathcal{B}_f(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mathcal{B}(x_0, r_0) \subseteq O_0 \cap V$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{B}_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq O_{n+1} \cap \mathcal{B}(x_n, r_n) \text{ et } 0 < r_n < 2^{-n}$$

Comme O_0 est dense dans X, il existe $x_0 \in O_0 \cap V$ et comme $O_0 \cap V$ est un ouvert, il existe $0 < r_n < 2^{-0}$ tel que $\mathcal{B}_o(x_0, r_0) \subseteq O_0 \cap V$.
Supposons désormais que les $n + 1$ premières boules sont construites. Comme O_{n+1} est dense dans X, il existe un élément $x_{n+1} \in O_{n+1} \cap \mathcal{B}_o(x_n, r_n)$ et puisque $O_{n+1} \cap \mathcal{B}_o(x_n, r_n)$ est un ouvert, il existe $0 < r_{n+1} < 2^{-(n+1)}$ tel que $\mathcal{B}_o(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq O_{n+1} \cap \mathcal{B}_o(x_n, r_n)$.

Ainsi, la famille $(\mathcal{B}_f(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides emboîtés dont le diamètre tend vers 0. Donc comme X est complet, on a par le théorème de Cantor qu'il existe $x \in X$ tel que :

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_f(x_0, r_0) \subseteq V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

Finalement, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans X.

■

Remarque 4 :
$*$ De manière équivalente, si X est un espace métrique complet, alors toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.
$*$ Si X n'est pas un espace complet, alors le résultat n'est plus vrai en général. Par exemple, si $X = \mathbb{Q}$ est muni de la distance usuelle, alors chaque $O_q = \mathbb{Q}\backslash\{q\}$ (avec $q \in \mathbb{Q}$) est un ouvert dense de $\mathbb{Q}$, mais leur intersection est vide.

$*$ Si X est un espace topologique, alors toute intersection finie d'ouverts denses dans X est un ouvert dense dans X. Il suffit de montrer le résultat pour deux ouverts O_1 et O_2 denses dans X.
Si V est un ouvert non vide de X, alors :

$$V \cap O_1 \cap O_2 = \underbrace{(V \cap O_1)}_{\text{ouvert non vide}} \cap \underbrace{O_2}_{\text{dense}} \neq \emptyset$$

$*$ Le lemme de Baire reste valable si X est un ouvert d'un espace métrique complet.

Corollaire 5 : [Gourdon, p.417]
Soit X un espace métrique complet.
Si X est la réunion d'une famille de fermée $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors la réunion $\left(\mathring{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un ouvert dense dans X.

Preuve :
Soit X un espace métrique complet.
On suppose que X est la réunion d'une famille de fermée $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note F le complémentaire dans X de la réunion des $\mathring{F_n}$.
Comme F est fermé (complémentaire d'un ouvert), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F \cap F_n$ est fermé et :

$$F \mathring{\cap} F_n \subseteq \mathring{F} \cap \mathring{F_n} \subseteq F \cap \mathring{F_n} = \emptyset$$

Ainsi, la partie F est la réunion des fermés d'intérieurs vides $F \cap F_n$, donc F est d'intérieur vide par le lemme de Baire.

■

Remarque 6 :
Si X n'est pas un espace complet, alors le résultat est faux en général. Par exemple si $X = \mathbb{Q}$ est muni de la distance usuelle, alors chaque $F_q = \{q\}$ (avec $q \in \mathbb{Q}$) est un fermé de $\mathbb{Q}$. Or, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est la réunion des F_q pour mais la réunion de l'intérieur des F_q est vide.

II.2 Sur le théorème de Banach-Steinhaus...

Dans le théorème de Banach-Steinhaus, on peut montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ vérifie un et un seul des points suivants :
$*$ La partie $\mathcal{F}$ est bornée.
$*$ L'ensemble des points $x \in E$ tels que $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|\varphi(x)\| = +\infty$ est dense dans E.

De plus, on ne peut pas se passer en général de l'hypothèse que E soit complet. Par exemple, considérons l'espace vectoriel E des suites réelles dont le support est fini que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

On introduit la famille d'applications $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E,\ \varphi_n(x) = nx_n$$

On remarque que $|||\varphi_n||| = n$ et donc que la famille $\mathcal{F}$ n'est pas bornée (donc le premier point n'est pas vérifié). De plus, pour tout $x \in E$, la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc elle est bornée (et ainsi le deuxième point n'est pas vérifié).

II.2.1 Suites d'applications linéaires

La limite simple d'une suite d'applications linéaires continues est une application linéaire qui n'est pas continue en général. On a néanmoins le résultat suivant :

Proposition 7 : [Gourdon, p.424]
Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé.
Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications linéaires continues de E dans F convergeant simplement vers $\varphi : E \longrightarrow F$, alors $\varphi \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

Preuve :
Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé.
On considère $A = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications linéaires continues de E dans F convergeant simplement vers $\varphi : E \longrightarrow F$.
Par hypothèse, pour tout $x \in E$, la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Donc par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E,\ \|\varphi_n(x)\|_F \leq M \|x\|_E$$

En passant à la limite, on obtient donc la continuité de φ et ainsi le résultat voulu.

■

Remarque 8 :
$*$ Attention, en général on n'a pas la convergence de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers φ dans l'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$. Par exemple, considérons l'espace vectoriel complet E des suites réelles de limite nulle à l'infini que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
On introduit la suite d'applications $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E,\ \varphi_n(x) = x_n$$

La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\varphi = 0 \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$, or on a $\|\varphi_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers φ dans $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$.
$*$ La résultat précédent est faux en général si E n'est pas complet. Par exemple, considérons l'espace vectoriel E des suites réelles dont le support est fini que l'on

munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
On introduit la suite d'applications $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E,\ \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

Pour tout $x \in E$, la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction φ définie par $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. De plus, si l'on définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ définie par :

$$\forall n \in [\![1;k]\!],\ x_n = 1 \text{ et } \forall n > k,\ x_n = 0$$

alors on a l'égalité $|\varphi(x)| = k\,\|x\|_\infty$, donc φ n'est pas continue sur E.

II.2.2 Continuité d'une application bilinéaire

La continuité d'une application bilinéaire par rapport à chacune de ses variables n'implique pas sa continuité en général. On a néanmoins le résultat suivant :

Proposition 9 : [Gourdon, p.424]
Soient E_1 un espace de Banach et E_2 et F deux espaces vectoriels normés.
Si $B : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ est une application bilinéaire telle que les applications $x \longmapsto B(x,y)$ et $y \longmapsto B(x,y)$ soient respectivement continues sur E_1 et E_2, alors B est continue sur $E_1 \times E_2$.

Preuve :
Soient E_1 un espace de Banach et E_2 et F deux espaces vectoriels normés.
On considère $B : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ est une application bilinéaire telle que les applications $x \longmapsto B(x,y)$ et $y \longmapsto B(x,y)$ soient continues sur E_1 et E_2.
Pour tout $y \in E_2$, on note $B_y \in \mathcal{L}_c(E_1,F)$ l'application linéaire définie par $B_y(x) = B(x,y)$ et on considère la famille :

$$A = \{B_y \in \mathcal{L}_c(E_1,F) \text{ tq } y \in E_2 \text{ et } \|y\|_{E_2} = 1\}$$

Pour tout $x \in E_1$, l'application $y \longmapsto B(x,y)$ est linéaire est continue, donc :

$$\forall x \in E_1,\ \sup_{\|y\|_{E_2}=1} |B(x,y)| = \sup_{f\in A} \|f(x)\|_F < +\infty$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall y \in E_2,\ \|y\|_{E_2} = 1,\ \forall x \in E_1,\ \|B(x,y)\|_F \leq M\,\|x\|_{E_1}\,\|y\|_{E_2}$$

Ainsi, B est continue sur $E_1 \times E_2$.

■

Remarque 10 :
$*$ De manière analogue, le résultat est aussi valable si c'est E_2 qui est complet à la place de E_1.
$*$ Par contre, on ne peut pas se passer de la complétude d'au moins un des deux espaces. Par exemple, considérons l'espace vectoriel E des suites réelles dont le support est fini que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
On introduit l'application $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ B(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$$

Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a les inégalités :

$$|B(x,y)| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|\right) \|x\|_\infty \text{ et } |B(x,y)| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|\right) \|y\|_\infty$$

Donc l'application B est continue par rapport à chacune de ses variables. De plus, si l'on définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ définie par :

$$\forall n \in [\![1;k]\!],\ x_n = 1 \text{ et } \forall n > k,\ x_n = 0$$

alors on a l'égalité $|B(x,x)| = k\,\|x\|_\infty^2$, donc B n'est pas continue sur E^2.

Remarque 11 :
Il est possible de montrer encore d'autres résultats comme la convergence d'une somme de Riemann ainsi que des résultats sur le produit de Cauchy par exemple (réciproque partielle au théorème de Mertens) ou bien encore le fait que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et 2π-périodique dont la série de Fourier ne converge pas simplement vers f est dense dans l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et 2π-périodique.

II.3 Pour aller plus loin : quelques applications du lemme de Baire

On étudie désormais quelques conséquences du lemme de Baire.

II.3.1 Espace métrique complet

Proposition 12 :
Si X est un espace métrique complet, alors X est fini ou indénombrable.

Preuve :
Soit X un espace métrique.
Raisonnons par contraposée en supposant que X soit dénombrable :
X est alors la réunion des fermés d'intérieurs vides $\{x\}$ pour $x \in X$. On en déduit que X ne peut pas être complet, sinon X serait d'intérieur vide par le lemme de Baire, ce qui est absurde.

■

Exemple 13 :
On retrouve le fait que l'ensemble $\mathbb{R}$ est indénombrable car complet et non fini.

II.3.2 Espace vectoriel normé

On obtient un résultat analogue au précédent pour les espaces de Banach.

Proposition 14 : [Gourdon, p.419]
Un espace vectoriel normé admettant une base dénombrable n'est pas complet.

Preuve :
Soit E un espace vectoriel normé admettant une base $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \mathrm{Vect}(v_0, ..., v_n)$. Chaque F_n est alors un sous-espace vectoriel strict de E et donc d'intérieur vide et comme F_n est de dimension finie, il est fermé dans E.

D'après le lemme de Baire, si E était complet, alors l'espace vectoriel E qui est la réunion des F_n serait d'intérieur vide, ce qui n'est pas le cas. Finalement, E ne peut être complet.

■

Exemple 15 :
Quelque soit la norme considérée, l'espace $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet.

II.3.3 Caractérisation des endomorphismes nilpotents

En utilisant le lemme de Baire, on peut généraliser une caractérisation classique des endomorphismes nilpotents en dimension finie.

Proposition 16 :
Soient E un espace de Banach et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme continu.
L'endomorphisme u est nilpotent si, et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n(x) = 0$.

Preuve :
Soient E un espace de Banach et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme continu.
$*$ Si u est un endomorphisme nilpotent, alors on a directement le résultat par définition.

$*$ Réciproquement, supposons que pour tout $x \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^{(n)}(x) = 0$.
On a alors que E est la réunion des fermés $F_n = \{x \in E \text{ tq } u^n(x) = 0\}$ (avec $n \in \mathbb{N}$).
Comme E est complet, on en déduit par le lemme de Baire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que F_p est d'intérieur non vide et ainsi, il existe $a \in E$ et $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_f(a, r) \subseteq F_p$.

On a donc pour tout $n \in E\backslash\{0\}$:

$$u^{(p)}(x) = \frac{\|x\|}{r}\left(u^p\left(a + r\frac{x}{\|x\|}\right) - u^p(a)\right) = 0$$

Donc $u^p = 0$ et on a le résultat voulu.

Finalement, on a donc démontré l'équivalence voulue.

■

Remarque 17 :
$*$ On ne peut pas se passer de la complétude de E en général. Par exemple, considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|P^{(n)}(0)\right|$$

L'endomorphisme de dérivation $D \in \mathcal{L}(E)$ est continu car $\|D(P)\| \leq \|P\|$ pour tout $P \in E$. De plus, il vérifie l'hypothèse de la proposition précédente mais l'endomorphisme D n'est pas nilpotent.
$*$ Plus généralement, on peut montrer que si E est un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u admet un polynôme minimal si, et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \exists P \in \mathbb{R}[X]\backslash\{0\} \text{ tq } P(u)(x) = 0$$

II.3.4 Partition dénombrable d'un segment avec des fermés

Proposition 18 : [Gourdon, p.426]
Il n'existe pas de partition dénombrable de l'intervalle $[0; 1]$ avec des fermés.

Preuve :
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une partition $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés de $[0;1]$.
On considère le fermé de $[0;1]$ défini par :

$$\Delta = [0;1]\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n \text{ avec } \Delta_n = \mathrm{Fr}(F_n)$$

Par connexité de l'intervalle $[0;1]$, chaque Δ_n n'est pas vide, donc Δ n'est pas vide. De plus, chaque Δ_n est un fermé de Δ. Comme l'espace métrique Δ est complet, on en déduit par le lemme de Baire qu'il existe un indice $p\in\mathbb{N}$ tel que Δ_p est d'intérieur non vide dans Δ.

On en déduit qu'il existe un ouvert non vide U de $[0;1]$ (que l'on peut supposer connexe) tel que $U\cap\Delta \subseteq \Delta_p$. Comme Δ_p est la frontière de F_p, on ne peut pas avoir $U\subseteq F_p$, donc il existe $q\in\mathbb{N}$ différent de p tel que $U\cap F_q \neq \emptyset$.

Ainsi, U est un ouvert connexe rencontrant F_q et le complémentaire de F_q, donc l'ouvert U rencontre $\Delta_q = \mathrm{Fr}(F_q)$, ce qui est contradictoire.

■

Remarque 19 :
$*$ Le résultat reste valable pour tout segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ (il suffit de remarquer que $[a;b]$ est homéomorphe à $[0;1]$ ou d'adapter la preuve de la proposition ci-dessus).
$*$ Plus généralement, le résultat et la démonstration ci-dessus se généralisent à un espace métrique complet, connexe et localement connexe.

II.3.5 Limite d'une fonction

Proposition 20 : [Gourdon, p.420]
Si $f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$$

alors la fonction f est de limite nulle en $+\infty$.

Preuve :
Soit $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction vérifiant les hypothèse de la proposition ci-dessus.
On fixe un réel $\varepsilon>0$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note :

$$F_n = \{x\in\mathbb{R}^+ \text{ tq } \forall p\in\mathbb{N},\ p\geq n,\ |f(px)|\leq\varepsilon\}$$

Par hypothèse, la réunion des F_n contient l'ouvert $]0;+\infty[$. De plus, comme la fonction f est continue, chacun des F_n est une partie fermée de $\mathbb{R}^+$. Comme $\mathbb{R}^+$ est complet, on en déduit par le lemme de Baire qu'il existe un entier $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide. Ainsi, il existe $a,b\in\mathbb{R}^+$ tel que $]a;b[\subseteq F_{n_0}$.

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a $(p+1)a<pb$ si, et seulement si, $p>\frac{a}{b-a}$. On en déduit qu'en fixant $N\in\mathbb{N}$ tel que $N>\frac{a}{b-a}$ et $N\geq n_0$, on a :

$$\bigcup_{p\geq N}]pa;pb[=]Na;+\infty[$$

On conclut que pour tout $x\geq Na$, on a $|f(x)|\leq\varepsilon$ et donc f est nulle à l'infini.

■

Remarque 21 :
Si la fonction f n'est pas continue, alors le résultat est faux. Par exemple, en notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, on peut considérer la fonction :

$$f: \left|\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2\in\mathcal{P} \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{array}\right.$$

En utilisant l'irrationalité de $\sqrt{\frac{p}{q}}$ pour $(p,q)\in\mathcal{P}^2$ avec $p\neq q$, on remarque que f vérifie l'hypothèse sur la limite de la proposition précédente mais pas sa conclusion.

II.3.6 Une caractérisation des polynômes

Le résultat suivant caractérise les polynômes parmi les fonctions holomorphes :

Proposition 22 :
Soit $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction holomorphe.
Si f vérifie :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \exists n\in\mathbb{N} \text{ tq } f^{(n)}(z)=0$$

alors f est un polynôme.

Preuve :
Soit $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \exists n\in\mathbb{N} \text{ tq } f^{(n)}(z)=0$$

Chaque $F_n = \left\{z\in\mathbb{C} \text{ tq } f^{(n)}(z)=0\right\}$ est un fermé de $\mathbb{C}$ et par hypothèse, $\mathbb{C}$ est la réunion des F_n. Comme $\mathbb{C}$ est complet, on en déduit par le lemme de Baire qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que F_p est d'intérieur non vide. Ainsi la fonction $f^{(p)}$ est holomorphe et nulle sur un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, donc elle est nulle sur $\mathbb{C}$ par le principe du prolongement analytique.

Finalement, f est un polynôme.

■

Remarque 23 : [Gourdon, p.422]
Le théorème précédent s'adapte aux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais la démonstration est plus difficile. On peut même démontrer le résultat plus général suivant :
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et s'il existe une partie dénombrable D de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } f^{(n)}(x) \in D$$

alors f est une fonction polynomiale.

Remarque 24 : [Gourdon, p.421 + 423]
Il y a encore énormément d'application au lemme de Baire, comme par exemple le théorème de l'application ouverte, le théorème de Banach ou des résultats sur les fonctions.

II.4 Recasages

Recasages : 205 - 208 - 235 - 246.

III Bibliographie

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.