leçons : 221 EDO linéaires
224 : dev asymptotiques ?

Théorème de Sturm et application

(27)

Référence : FGN Analyse 4

Thm : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ tq $q_1 \geqslant q_2$.
Soient $\alpha < \beta$ deux zéros d'une solution non nulle de $y'' + q_2 y = 0$
Alors toute solution de $y'' + q_1 y = 0$ s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

Application : soit $(E) : y'' + e^t y = 0$ sur $I = \mathbb{R}^+$. Alors toute solution non nulle de (E) admet une infinité dénombrable de zéros que l'on peut ordonner en une suite $(t_n)_{n \geqslant 1}$ et $e^{t_n} \sim \dfrac{\pi^2 n^2}{4}$.

preuve :

① lemme : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $q : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$, $(E) : y'' + qy = 0$
Soit x une solution non identiquement nulle de (E), alors les zéros de x sont isolés.

preuve : Soit x solution de (E), $x \neq 0$. Alors x $\mathcal{C}^2$, soit α un zéro de x (s'il en existe un) $x(\alpha + h) = x(\alpha) + h x'(\alpha) + \underset{h \to 0}{o}(h)$

Par unicité du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + qy = 0 \\ y(\alpha) = 0 \\ y'(\alpha) = 0 \end{cases}$, on a $x'(\alpha) \neq 0$

D'où $\dfrac{x(\alpha+h)}{h} = x'(\alpha) + \underset{h \to 0}{o}(1) \quad \forall h \neq 0$

D'où $\exists\, \eta > 0 \quad \forall t \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta] \setminus \{\alpha\} \quad x(t) \neq 0$

② preuve du théorème : Soient $\alpha < \beta$ deux zéros d'une solution non nulle y_2 de $y'' + q_2 y = 0$ et y_1 une solution de $y'' + q_1 y = 0$. Supposons que y_1 ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$, alors par continuité elle garde un signe constant sur $[\alpha, \beta]$. Quitte à considérer $-y_1$, on peut supposer $y_1 > 0$ sur $[\alpha, \beta]$. Par le lemme, les zéros de y_2 sont isolés donc quitte à remplacer β par le premier zéro de y_2 strictement supérieur à α, on peut supposer que y_2 ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta[$ et quitte à considérer $-y_2$, on peut supposer $y_2 > 0$ sur $]\alpha, \beta[$.

On pose $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$. $W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1' y_2' - y_1'' y_2 = -y_1 y_2 q_2 + q_1 y_1 y_2 q_1$
$= y_1 y_2 (q_1 - q_2) \geqslant 0$

W croissante sur $[\alpha, \beta]$, $W(\alpha) = y_1(\alpha) y_2'(\alpha)$ et $W(\beta) = y_1(\beta) y_2'(\beta)$

Or $y_2'(\alpha) > 0$ et $y_2'(\beta) < 0$ donc $W(\beta) < 0 < W(\alpha)$ Absurde

③ <u>Application à $y'' + e^t y = 0$</u> ; Soit y une solution non nulle.

(i) MQ y s'annule une infinité de fois

Soit $\alpha \geqslant 0$. Sur $[\alpha, +\infty[$ on a, $e^t \geqslant e^\alpha$ et $z : t \mapsto \sin(e^{\alpha/2}(t-\alpha))$ est une solution non nulle de $y'' + e^\alpha y = 0$ qui s'annule en α et en $\alpha + \pi e^{-\alpha/2}$

Par ② y s'annule sur $[\alpha, \alpha + \pi e^{-\frac{\alpha}{2}}]$. Donc y s'annule une infinité de fois.

(ii) Par ① les zéros de y sont isolés donc il n'y en a qu'un nombre fini dans tout compact de la forme $[0, A]$ pour $A > 0$. Ceci permet de ranger les zéros de y en une suite (t_n) strictement croissante. On a tout de suite que $t_n \to +\infty$ car elle n'est pas majorée par (i)

(iii) On applique (i) avec $\alpha = t_n$: $\forall n \geqslant 1 \quad t_{n+1} \leqslant t_n + \dfrac{\pi}{e^{\frac{t_n}{2}}}$

On pose $J = [t_n, t_{n+1}]$ $\quad \forall t \in J \quad e^t \leqslant e^{t_{n+1}}$

$u(t) = \sin\left(e^{\frac{t_{n+1}}{2}}(t - t_n)\right)$ solution de $y'' + e^{t_{n+1}} y = 0$, non nulle

Par ② u s'annule sur $]t_n, t_{n+1}]$ donc $t_n + \pi e^{-\frac{t_{n+1}}{2}} \leqslant t_{n+1}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{\pi}{e^{\frac{t_{n+1}}{2}}} \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant \frac{\pi}{e^{\frac{t_n}{2}}}$$

$t_n \to +\infty$ donc $t_{n+1} - t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{\frac{t_{n+1}}{2}} \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{\frac{t_n}{2}}$

donc $t_{n+1} - t_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{e^{t_n/2}}$. On pose alors $u_n = e^{\frac{t_n}{2}}$.

On a $2(\ln u_{n+1} - \ln u_n) \sim \dfrac{\pi}{u_n}$

Or $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 + \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right)\right) \sim \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$

car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. D'où $u_{n+1} - u_n \sim \dfrac{\pi}{2}$

Par théorème de sommation des relations de comparaison : $u_n \sim \dfrac{n\pi}{2}$

D'où $e^{t_n} = u_n^2 \sim \dfrac{\pi^2 n^2}{4}$