Générateurs de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

I Le développement

Le but de ce développement est de montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations et enfin de donner une application topologique.

Dans tout ce développement, on considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque.

Théorème 1 : [Rombaldi, p.688]
Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ s'écrit sous la forme $A = \prod_{k=1}^r P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^s Q_j$, où les P_k et Q_j sont des matrices de transvections et $\lambda = \det(A)$.

Preuve :
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \text{"Toute matrice } A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ s'écrit sous la forme donnée".}$$

- Initialisation pour $n = 1$:
On a directement que $A = D_n(\det(A))$ car A peut être identifié à son déterminant et les deux produits sont vides ($r = s = 0$).
La propriété est donc bien initialisée.

- Hérédité :
On suppose la propriété vraie pour toute matrice de $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ avec $n - 1 \geq 1$. Qu'en est-il au rang n ?
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Si $a_{1,1} \neq 1$, alors comme A est inversible, C_1 est non nulle et il existe donc un entier $i \in [\![2;n]\!]$ tel que $a_{i,1} \neq 0$ et on se ramène à $a_{1,1} = 1$ via l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1-a_{1,1}}{a_{i,1}} L_i$.
- Ensuite, pour tout entier $i \in [\![2;n]\!]$, on effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1} L_1$ afin d'annuler le coefficient $a_{i,1}$.

Il existe donc des matrices de transvection $R_1, ..., R_r$ telles que :

$$\prod_{k=1}^r R_k A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

De la même manière, en multipliant à droite par des matrices de transvections $S_1, ..., S_s$ on obtient :

$$\prod_{k=1}^r R_k A \prod_{j=1}^s S_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \beta_{n,2} & \cdots & \beta_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

De plus, étant donné que les transvections ont un déterminant égal à 1, on a $\det(A) = 1 \times \det(B) = \det(B) \neq 0$ et donc $B \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$. Par hypothèse de récurrence, il existe des matrices de transvections $P_1, ..., P_t, Q_1, ..., Q_u \in \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que :

$$B = \prod_{k=1}^t P_k D_{n-1}(\det(B)) \prod_{j=1}^u Q_j$$

Posons alors :

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_k \end{pmatrix} \text{ et } T'_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_j \end{pmatrix}$$

Ce sont bien des matrices de transvections et le calcul par bloc montre que l'on a :

$$A = \left(\prod_{k=1}^r R_k\right)^{-1} \prod_{k=1}^t T_k D_n(\det(A)) \prod_{j=1}^u T'_j \left(\prod_{j=1}^s S_j\right)^{-1}$$

Et puisque l'inverse d'une matrice de transvection est encore une matrice de transvection, on a le résultat voulu.

La propriété est vraie au rang n, elle est donc héréditaire.

On a ainsi montré par récurrence que toute matrice inversible pouvait s'écrire sous la forme énoncée.

■

Corollaire 2 : [Rombaldi, p.689]
Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Preuve :
$*$ Soit $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La matrice A s'écrit sous la forme $A = \prod_{k=1}^r R_k$, où les R_k sont des matrices de transvections.
Pour toute matrice de transvection $T = T_{i,j}(\lambda)$, on note $T(t) = T_{i,j}(t\lambda)$ et on définit le chemin :

$$\gamma : \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \prod_{k=1}^r R_k(t) \end{array} \right.$$

On a alors $\gamma(0) = I_n$, $\gamma(1) = A$ et γ est continue car l'application T est continue (on peut le vérifier avec la norme du maximum des coefficients en valeur absolue par exemple). Ainsi, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs (car on relie deux points quelconques en passant par I_n).

$*$ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
La matrice A s'écrit sous la forme $A = \prod_{k=1}^{r} P_k D_n(\det(A)) \prod_{j=1}^{s} Q_j$, où les P_k et Q_j sont des matrices de transvections.
Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, il existe une application continue $\varphi : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = \det(A)$. On définit ainsi le chemin :

$$\gamma : \left| \begin{array}{rcl} [0;1] & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & \prod_{k=1}^{r} P_k(t) D_n(\varphi(t)) \prod_{j=1}^{s} Q_j(t) \end{array} \right.$$

On a alors $\gamma(0) = I_n$, $\gamma(1) = A$ et γ est continue car φ et T sont continues. Ainsi, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs (pour les mêmes raisons qu'au point précédent).

■

Corollaire 3 : [Rombaldi, p.689]
Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe et ses deux composantes connexes sont $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

Preuve :
$*$ Par le même argument que le deuxième point du corollaire précédent on a que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

$*$ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car il peut s'écrire comme unique disjointe de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ (qui sont deux ouvert en tant qu'images réciproques d'ouverts par une application continue).

$*$ Enfin, on a $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ connexes par arcs et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) \sqcup \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ sont les deux composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans ce développement, on a utilisé les propriétés de base des transvections et des dilatations ainsi que le lien avec les opérations élémentaires. On donne ci-dessous quelques rappels à ce sujet en posant E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n :

Définition 4 : Transvection [Rombaldi, p.145] :
On considère φ une forme linéaire non nulle sur E.
On appelle **transvection d'hyperplan** $\mathrm{Ker}(\varphi)$ toute application linéaire u de E dans E définie par :

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)a,\ a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

Théorème 5 : [Rombaldi, p.146]
$*$ Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection si, et seulement si, il existe un hyperplan H de E tel que $u|_H = \mathrm{Id}_H$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \subseteq H$.
$*$ Pour tout transvection $\tau_{\varphi,a}$, $\tau_{\varphi,2a}^2$ est une transvection.
$*$ Une transvection $\tau_{\varphi,a}$ est dans $\mathrm{GL}(E)$, son inverse est la transvection $\tau_{\varphi,-a}$, 1 est l'unique valeur propre de $\tau_{\varphi,a}$ et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}(\varphi)$ pour $u \neq \mathrm{Id}_E$.
$*$ Le conjugué dans $\mathrm{GL}(E)$ d'une transvection est une transvection.
$*$ L'ensemble $T(H)$ des transvections d'hyperplan $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}(E)$ isomorphe au groupe additif $(H, +)$.
$*$ Une transvection u admet un polynôme minimal qui est $(X-1)$ lorsque $u = \mathrm{Id}_E$ ou $(X-1)^2$ lorsque $u \neq \mathrm{Id}_E$.

Théorème 6 : [Rombaldi, p.147]
Soit $u \in \mathcal{L}(E) \backslash \{\mathrm{Id}_E\}$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ u est une transvection.
$*$ Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme suivante :
$T_n = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$*$ Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $1 \leq i \neq j \leq n$.
$*$ $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}_E) = 1$ et le polynôme caractéristique de u est $(X-1)^n$.

Corollaire 7 : [Rombaldi, p.148]
$*$ Pour $\mathbb{K}$ infini, toute transvection différente de Id_E s'écrit comme produit de deux matrices diagonalisables inversibles.
$*$ Si $n \geq 3$, alors toutes les transvections différentes de Id_E sont conjugués dans $\mathrm{SL}(E)$.

Définition 8 : Dilatation [Rombaldi, p.150] :
On considère φ une forme linéaire non nulle sur E.
On appelle **dilatation d'hyperplan** $\mathrm{Ker}(\varphi)$ toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)a,\ a \in E \backslash \mathrm{Ker}(\varphi)$$

Théorème 9 : [Rombaldi, p.150]
Une dilatation $\delta_{\varphi,a}$ est dans $\mathrm{GL}(E)$ si, et seulement si, $\lambda = 1 + \varphi(a) \neq 0$.

Théorème 10 : [Rombaldi, p.150]
$*$ Un automorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ est une dilatation si, et seulement si, il existe un hyperplan H tel que $u|_H = \mathrm{Id}_H$ et u diagonalisable de valeurs propres 1 et $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0;1\}$ (donc $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$).
$*$ Le conjugué dans $\mathrm{GL}(E)$ d'une dilatation est une dilatation de même rapport.
$*$ Une dilatation u de rapport λ admet un polynôme minimal qui est $(X-1)(X-\lambda)$.
$*$ L'inverse d'une dilatation de rapport λ est une dilatation de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Théorème 11 : [Rombaldi, p.152]
Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ u est une dilatation de rapport λ.
$*$ Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $I_n + (\lambda-1)E_{n,n}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0;1\}$.

II.2 Pour aller plus loin...

Nous avons montré dans ce développement que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations, mais cette décomposition n'est pas unique !

On peut également montrer que si $\mathbb{K}$ a au moins trois éléments, alors toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme produit de matrices de dilatation.

On peut même montrer le résultat suivant :

Corollaire 12 : [Francinou, p.343]
Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices diagonalisables inversibles.

En effet, il suffit d'écrire une matrice de transvection comme produit de (deux) matrices diagonalisables inversibles et on a le résultat.

On notera également qu'il existe d'autres manières de montrer que les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs, que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe et que ses deux composantes connexes sont $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ (on peut par exemple considérer d'autres chemins).

II.3 Recasages

Recasages : 106 - 108 - 154 - 162 - 204.

III Bibliographie

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Serge Francinou, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 2*.