Référence :
Cours de mathématiques spéciales I : Algèbre, Ramis

Déf. On dit que P est un **polynôme symétrique** si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}) = P(X_1, ..., X_n)$.

Théo. *Soit $P \in A[X_1, ..., X_n]$ symétrique. Alors il existe un unique polynôme $Q \in A[Y_1, ..., Y_n]$ tel que $P(X_1, ..., X_n) = Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$.*

Démonstration.
Notations : Dans $A[X_1, ..., X_n]$, on note Σ_i le $i^{\text{ème}}$ polynôme symétrique élémentaire. On note aussi $(\Sigma_i)_0$ le $i^{ème}$ polynôme symétrique élémentaire évalué en $X_n = 0$.

NB. On peut constater que $(\Sigma_i)_0$ est le $i^{ème}$ polynôme symétrique élémentaire de $A[X_1, ..., X_{n-1}]$.

- **Existence**

  Soit $\mathcal{A}_{n,p}$ l'hypothèse : "le théorème est vérifié pour tout polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$ à $n \in \mathbb{N}^*$ indéterminées". On va effectuer une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ puis sur $p \in \mathbb{N}$.
  $\mathcal{A}_{1,p}$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, pour $P = Q$, on a

  $$P(X_1) = Q(X_1) = Q(\Sigma_1).$$

  Supposons maintenant que $A_{n-1,p}$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
  On travaille maintenant dans $A[X_1, ..., X_n]$ (n fixé). Par récurrence sur p, le degré de P.
  Pour p=0, on a $P = c$ donc pour $Q = c$, on a

  $$P(X_1, ..., X_n) = Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n).$$

  Supposons le résultat vérifié pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à p.
  Soit P un polynôme symétrique de $A[X_1, ..., X_n]$ de degré p. Considérons $P(X_1, ..., X_{n-1}, 0)$ qui est un polynôme symétrique en $(n-1)$ variables. On peut donc lui appliquer le théorème.
  Il existe $Q_1 \in A[X_1, ..., X_{n-1}]$ tel que

  $$P(X_1, ..., X_{n-1}, 0) = Q_1((\Sigma_1)_0, ..., (\Sigma_{n-1})_0).$$

  Posons

  $$P_1(X_1, ..., X_n) = P(X_1, ..., X_n) - Q_1(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1})$$

  On remarque que

  $$P_1(X_1, ..., X_{n-1}, 0) = 0.$$

  On a ainsi $X_n | P_1$. De plus, comme P_1 est symétrique, on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!], X_i | P_1$. On a donc $\Sigma_n = \prod_{i=1}^n X_i | P_1$.
  Il existe, par conséquent, $P_2 \in A[X_1, ..., X_n]$ tel que

  $$P_1 = \Sigma_n P_2.$$

  Nous allons maintenant chercher à appliquer l'hypothèse de récurrence sur P_2. Nous voulons donc des informations sur son degré. On a :

  $$P_2 = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k$$

  Il existe $k_0 \in \mathbb{N}^n$ tel que $|k_0| = \deg(P_2)$ avec $a_{k_0} \neq 0$. On a également

  $$\begin{aligned} \Sigma_n P_2 &= \Sigma_n \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k X^{k+(1,...,1)}. \end{aligned}$$

  Or, comme $|k_0 + (1, ..., 1)| = |k_0| = n$, on a donc

  $$p \geq \deg(P_1) = \deg(\Sigma_n P_2) \geq \deg(P_2) - n.$$

Ainsi, on a $\deg(P_2) \leq p - n$ et P_2 est symétrique.
On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence sur P_2.
Il existe donc $Q_2 \in A[X_1, ..., X_n]$ tel que

$$P_2(X_1, ..., X_n) = Q_2(\Sigma_1, ..., \Sigma_n).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} P_1(X_1, ..., X_n) &= \Sigma_n P_2(X_1, ..., X_n) \\ &= \Sigma_n Q_2(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) \\ &= Q_3(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) \text{ avec } Q_3(X_1, ..., X_n) = X_n Q_2(X_1, ..., X_n) \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\tilde{Q}_1(X_1, ..., X_n) = Q_1(X_1, ..., X_{n-1}).$$

On obtient donc

$$P(X_1, ..., X_n) = (\tilde{Q}_1 + Q_3)(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) \text{ avec } \pi(\tilde{Q}_1 + Q_3) \leq p$$

d'où le résultat.

- **Unicité**

Supposons qu'il existe $Q_1, Q_2 \in A[X_1, ..., X_n]$ tels que

$$P(X_1, ..., X_n) = Q_1(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = Q_2(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$$

avec $\pi(Q_1) \leq p$ et $\pi(Q_2) \leq p$.
On veut donc montrer que

$$(Q_1 - Q_2)(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = 0 \Longrightarrow Q_1 = Q_2$$

On va donc montrer que

$$Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = 0 \Longrightarrow Q = 0 \ (*)$$

Soit $\mathcal{B}_{n,p}$, l'hypothèse : "$(*)$ est vraie pour tout polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$ à $n \in \mathbb{N}^*$ indéterminées".

$\mathcal{B}_{1,p}$ est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, si $Q(\Sigma_1) = Q(X_1) = 0$, on a $Q = 0$.
Supposons maintenant que $\mathcal{B}_{n-1,p}$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. On travaille maintenant dans $A[X_1, ..., X_n]$ (n fixé). On fait une récurrence sur p, le degré de P.
Pour $p = 0$, on a $Q = c$ donc si $Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = 0$ alors $Q = 0$.
Supposons que $\mathcal{B}_{n,p-1}$ est vraie.
Soit $Q \in A[X_1, ..., X_n]$ de degré p tel que $Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = 0$. Effectuons la division euclidienne de Q par X_n. On a donc

$$Q(X_1, ..., X_n) = S(X_1, ..., X_n)X_n + R(X_1, ..., X_{n-1})$$

donc par hypothèse

$$Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = S(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)\Sigma_n + R(\Sigma_1, ..., \Sigma_{n-1}) = 0.$$

On évalue cette dernière égalité en $X_n = 0$ et on obtient :

$$Q((\Sigma_1)_0, ..., (\Sigma_{n-1})_0, 0) = R((\Sigma_1)_0, ..., (\Sigma_{n-1})_0) = 0.$$

On a donc $R = 0$ par $\mathcal{B}_{n-1,p}$. L'égalité précédente devient donc

$$Q(\Sigma_1, ..., \Sigma_n) = S(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)X_n.$$

Or, on sait que $\deg(S) \leq \deg(Q) - 1$ donc $S = 0$ par $\mathcal{B}_{n,p-1}$ d'où le résultat.

$\square$

Leçons possibles : 142