

démo: méthode de Newton.

Leçons: 218, 223, 226, 228, 229, 253

ref: Rouquier p 142.

Thm: Soit $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0 \forall x \in [c, d]$.
On considère la suite récurrente: $x_0 \in [c, d]$; $x_{n+1} = F(x_n) := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \forall n \geq 0$.
Alors f a un unique zéro $a \in]c, d[$ et:

- i) $\exists \alpha > 0$ tq $\forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, la suite (x_n) converge quadratiquement vers a .
ou quadratique
- ii) Si de plus $f''(x) > 0 \forall x \in [c, d]$, alors $\forall x_0 \in]a, d]$, $(x_n)_n$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)} (x_n - a)^2$ et $0 \leq x_{n+1} - a \leq c(x_n - a)^2$.

dem: expliquer schéma en quoi ça consiste. ①

① Détermination unique point fixe + majoration.

f est continue sur $[c, d]$ donc f strictement croissante sur $[c, d]$. $f(c) < 0, f(d) > 0 \Rightarrow f \nearrow$
Par le TVI, f s'annule en un unique point $a \in]c, d[$.

Ainsi, pour $x \in [c, d]$,
$$F(x) - a = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} = \frac{(x-a)f'(x) - (f(x) - f(a))}{f'(x)}$$

f est C^2 donc on peut utiliser la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2.

$\exists \xi$ entre x et a tq $f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(\xi)}{2} (a-x)^2$.
Donc, pour tout $x \in [c, d]$, $F(x) - a = \frac{f''(\xi)}{2f'(x)} (a-x)^2$. ∇

et $|F(x) - a| \leq c|x-a|^2$ où $c = \frac{\max |f''|}{2 \min |f'|}$

② Montrons i)

Soit $0 < \alpha < 1/c$ et tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c, d]$. existe car $a \in]c, d[$.

Soit $x \in I$, on a: $|F(x) - a| \leq c|x-a|^2 \leq c\alpha^2 < \frac{1}{c}\alpha^2 = \alpha$.

ainsi $F(I) \subset I$

Soit $x_0 \in I$, on a donc $F(x_n) \in I \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq c|x_n - a|^2$ par ①.

d'où $c|x_{n+1} - a| \leq c^2|x_0 - a|^{2^n} \leq (c\alpha)^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car $c\alpha < 1$.

Ainsi (x_n) converge vers a et par ① cette convergence est quadratique.

③ Montrons ii)

$f'' > 0$ sur $[c, d] \Rightarrow f'$ est croissante et f est convexe sur $[c, d]$.

Soit $x \in]a, d]$. $f'(x) > 0$ par hypothèse et $f(x) > 0$ (car $x > a$ et $f \nearrow$) donc

$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x$ Δ donc $F(x) \leq x \leq d$.

Et par ①, $F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} (x-a)^2 > 0$ donc $F(x) > F(a)$.

En particulier $F(x) \in [a, d]$ et $F([a, d]) \subset [a, d]$.

Si $x_0 \in [a, d]$, $x_n \in [a, d]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

et $(x_n)_n$ est une suite décroissante positive donc $(x_n)_n$ converge $\ell \in [a, d]$.

Comme $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

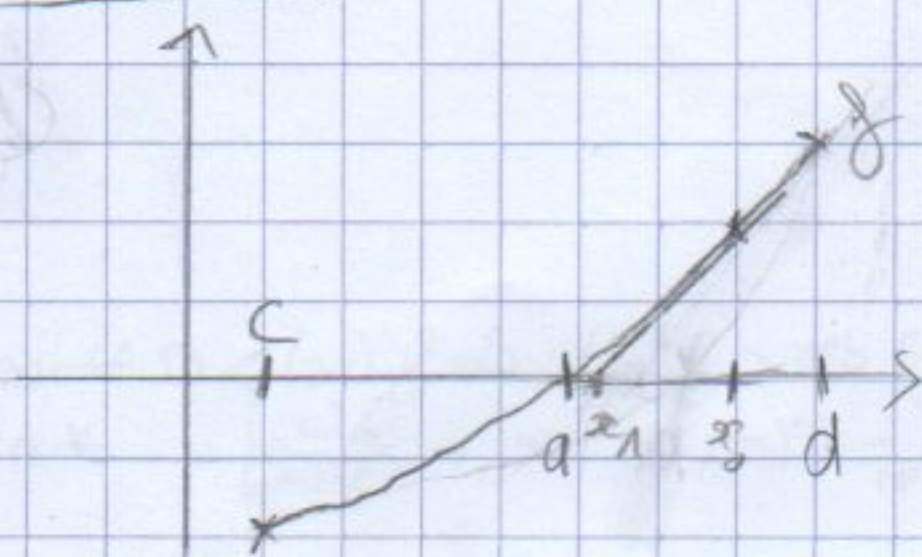
$n \rightarrow \infty \quad \ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$ donc $f(\ell) = 0$ et $\ell = a$.

De plus $0 \leq x_{n+1} - a \leq c(x_n - a)^2$

et si $x_0 > a$, alors $x_n > a \quad \forall n$ et: $\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)}$

d'où $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$.

Schéma :



$$\textcircled{1} \quad 0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \\ \Rightarrow x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$$

$\textcircled{2}$ f convexe donc sa tangente reste sous la courbe de f et en particulier $x_n \in [a, d]$.
De $\textcircled{1}$: $x_{n+1} \leq f(x_n) \forall n$ car $f' \geq 0$.

pour L229 1253

NE PAS FAIRE

Donnée : Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

1) f différentiable sur U : f convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in U \quad f(y) - f(x) \geq Df(x)(y - x)$

2) si $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ et f différentiable sur $U \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert : f convexe $\Leftrightarrow f'$ croissant sur U .

dem :

1) $\Rightarrow$ Supposons f convexe. Soient $x, y \in U$. Posons $g: t \in [0, 1] \mapsto f((1-t)x + ty)$

Par convexité de f , $\frac{g(t) - g(0)}{t} \leq \frac{(1-t)f(x) + tf(y) - f(x)}{t} = f(y) - f(x) \quad \forall t \in]0, 1]$

En faisant tendre $t \rightarrow 0$: $g'(0) \leq f(y) - f(x)$
 $= (y-x) \cdot Df((1-t)x + ty)(0)$

d'où $Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x)$.

$\Leftarrow$ Supposons l'inégalité. Soient $x, y \in U$ et $t \in [0, 1]$. Posons $z = (1-t)x + ty \in U$ (car U convexe)

Par l'inégalité : $Df(z)(x-z) \leq f(x) - f(z)$
 $(1-t) Df(z)(x-z) \leq (1-t)(f(x) - f(z))$

De même : $Df(z)(y-z) \leq f(y) - f(z)$
 $t Df(z)(y-z) \leq t(f(y) - f(z))$

En sommant ces 2 inégalités on a :

$$Df(z)((1-t)x + ty - z) \leq (1-t)f(x) + tf(y) - f(z)$$

$\begin{matrix} \text{---} z \text{---} \\ \text{---} 0 \text{---} \end{matrix}$

d'où $f(z) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ et f convexe.

2) $\Rightarrow$ Soit $x, y \in U$. Par $\textcircled{1}$, $f'(x)(y-x) \leq f(y) - f(x)$ et $f'(y)(x-y) \leq f(x) - f(y)$
donc $f'(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq f'(y)(x-y)$
et $0 \leq (f'(y) - f'(x))(y-x)$.

d'où $y \geq x \Leftrightarrow f'(y) \geq f'(x)$.

ops 254 (par symétrie)

$\Leftarrow$ Soit $x, y \in U$. Si f' est $\nearrow$, par EAF : $\exists z \in [x, y]$
 $f(y) - f(x) \geq f'(z)(y-x)$ car $f' \nearrow$

D'où f convexe par 1)