

devo: Num de Cauchy - Lipschitz Linéaire

leçons: 205, 206, 220, 221.

ref: Bourb p 64.

Num: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Soient $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continues. Soient $y_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in I$.

Le problème de Cauchy (c): $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t) = g(t, y(t)) := A(t)y(t) + b(t) \end{cases}$ admet une unique solution définie

sur I entier.

dem:

On munit $\mathcal{C}^0$ pour $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$.

I On suppose dans un premier temps $I = [a, b]$ ($a < t_0 < b$).

1) On se ramène à une étude de point fixe.

On pose $F: \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^0$ ($t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t g(s, \varphi(s)) ds$)

Par le TFA, F est à valeur dans $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ et g est continue

De plus: $\forall \varphi \in \mathcal{C}^0$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} F(\varphi)'(t) = g(t, \varphi(t)) = A(t)\varphi(t) + b(t) \\ F(\varphi)(t_0) = y_0 \end{cases}$

On en déduit que: Si $\varphi = F(\varphi)$ alors φ est solution de (c) sur $[a, b]$

Si $\begin{cases} \varphi' = A\varphi + b \\ \varphi(t_0) = y_0 \end{cases}$ alors $\begin{cases} F(\varphi)' = \varphi' \\ \varphi(t_0) = F(\varphi)(t_0) \end{cases}$ donc $\varphi = F(\varphi)$

égale à une constante C près
égale en 1 point $\Rightarrow C=0$

D'où: $\varphi \in \mathcal{C}^0$ est solution de (c) sur $[a, b] \iff \varphi = F(\varphi)$

2) Hypothèse contractante.

* Démontrons dans un premier temps que, comme $t \mapsto \|A(t)\|$ est continue sur I (compact):

$\exists M > 0, \forall t \in [a, b], \|A(t)\| \leq M$

On a donc:

$\forall t \in [a, b], \forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|g(t, x_1) - g(t, x_2)\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|.$

(g est donc globalement Lipschitz en sa seconde variable.)

Ainsi, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^0$ et $t \in [a, b]$, on a:

$$\|F(\varphi)(t) - F(\psi)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t g(s, \varphi(s) - \psi(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|g(s, \varphi(s) - \psi(s))\| ds \leq M \|\varphi - \psi\|_\infty |t - t_0|$$

PB: cela ne nous donne pas l'aspect contractant.

* Montrons alors par récurrence pour tout $p \geq 1$, la propriété

$\mathcal{P}(p): \forall \varphi, \psi \in \mathcal{C}^0, \forall t \in [a, b], \|F^p(\varphi)(t) - F^p(\psi)(t)\| \leq \frac{M^p |t - t_0|^p}{p!} \|\varphi - \psi\|_\infty$

ini: vient d'être fait.

hér: Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vérifié et montrons que $\mathcal{P}(p+1)$ est alors vraie.

Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^0$ et $t \in [a, b]$.

$$\|F^{p+1}(\varphi)(t) - F^{p+1}(\psi)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t g(s, F^p(\varphi)(s) - F^p(\psi)(s)) ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^t \|g(s, F^p(\varphi)(s) - F^p(\psi)(s))\| ds$$

$$\leq \int_{t_0}^t M \|F^p(\varphi)(s) - F^p(\psi)(s)\| ds$$

$$\leq M \int_{t_0}^t \frac{M^p |s - t_0|^p}{p!} \|\varphi - \psi\|_\infty ds$$

par H.R.

$$\leq \frac{M^{p+1} \|\varphi - \psi\|_\infty}{p!} \frac{|t - t_0|^{p+1}}{p+1}$$

$$\leq \frac{M^{p+1} |t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|\varphi - \psi\|_\infty$$

$$\int_{t_0}^t |s - t_0|^p ds = \left[\frac{(s - t_0)^{p+1}}{p+1} \right]_{t_0}^t = \frac{(t - t_0)^{p+1}}{p+1}$$

D'où $\mathcal{P}(p+1)$ est vérifiée.

Ainsi on a bien $\mathcal{P}(p)$ pour tout $p \geq 1$.

* De plus, par croissance comparée $\frac{M(b-a)^p}{p!} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$

$$\exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tq } 0 < \frac{M^p(b-a)^p}{p} < 1.$$

En particulier F^p est contractante.

3) On conclut:

Par le thm de Banach-Picard, F^p admet un unique point fixe $\psi \in (C^0, \|\cdot\|_\infty)$.

Le point vérifie: $F(\psi) = F(F^p(\psi)) = F^p(F(\psi))$

Donc $F(\psi)$ est un point fixe de F^p , on conclut par unicité du point fixe que $F(\psi) = \psi$.

II - Cadre général. (Dire juste les idées).

Existence: Il existe une suite croissante de compacts $([a_p, b_p])_{p \in \mathbb{N}}$ telle que

$$I = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} [a_p, b_p] \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad a_p < t_0 < b_p$$

$$\text{ex: si } a > -\infty: \quad a_p = a + \frac{b-a}{p+2} \quad ; \quad t_0 > a_p > a; \quad a_p \rightarrow a.$$

$$a = -\infty: \quad a_p = t_0 - \frac{1}{p+1}$$

$$\text{Si } b < +\infty: \quad b_p = b - \frac{b-t_0}{p+2} \quad ; \quad t_0 < b_p < b \quad \text{et} \quad b_p \rightarrow b$$

$$b = +\infty: \quad b_p = t_0 + \frac{1}{p+1}$$

$\forall p \in \mathbb{N}, \exists ! y_p$ solution de (c) sur I_p . (par précédemment).

Posons $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $p = \min\{n \in \mathbb{N} \mid t \in [a_p, b_p]\}$.

bien défini, si $q > p$ $y_q|_{I_p} \equiv y_p$. par unicité du cas précédent.

i) $t_0 \in [a_0, b_0]$ donc $y(t_0) = y_0(t_0) = y_0$.

ii) soit $t \in I$ et soit $p \in \mathbb{N}$ tq $t \in I_p$ donc $y(t) = y_p(t)$.

$$\text{Donc } y'(t) = y_p'(t) = f(t, y(t))$$

Unicité:

Supposons $\tilde{y}$ est une autre solution de (c) sur I .

Soit $p \in \mathbb{N}$, $\tilde{y}|_{I_p}$ est solution de (c) sur I_p donc par le cas précédent $\tilde{y}|_{I_p} = y_p$.

Donc: $\forall t \in I, \exists p \in \mathbb{N}$ tq $t \in I_p$

$$\text{d'où } y(t) = y_p(t) = \tilde{y}|_{I_p}(t) = \tilde{y}(t)$$

Questions:

→ dem TFA

→