dev : théorème de Riesz-Fischer

leçons : 201, 208.
réf : Kur p213.

Thm : Pour tout $p \in [1, +\infty[$, L^p est complet.

dem :
On va montrer le résultat en montrant que toute série absolument convergente est convergente.
Soit $(f_n)_n$ une suite de L^p telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty$.

2' Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère g_n un représentant de f_n.
On pose $S_n := \sum_{k=0}^{n} g_k$ et on veut mq $(S_n)_n$ converge dans $\mathcal{L}^p$.

CAS 1 : les g_k sont positifs.

① Construction d'une limite :
$(S_n)_n$ est une suite croissante donc elle converge simplement vers une fonction g mesurable.

② $g \in \mathcal{L}^p$:
On a par inégalité triangulaire :
$$\|S_n\|_p = \|\sum_{k=1}^{n} g_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|^p \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|g_k\|^p < +\infty.$$
De plus, par TCM : $\|g\|_p^p = \int_\Omega g^p \, d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} S_n^p \, d\mu \underset{\text{par TCM}}{=} \lim_{n\to+\infty} \|S_n\|_p^p < +\infty$.

Ainsi $g \in \mathcal{L}^p$.

6'30 (4'30) ③ convergence $\mathcal{L}^p$:
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\|g - S_n\|_p^p = \int_\Omega (g - S_n)^p \, d\mu = \int_\Omega \lim_{n'\to+\infty} (S_{n'} - S_n)^p \, d\mu.$$
Soit $n' \in \mathbb{N}$,
$$S_{n'} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n'} g_k.$$
$(S_{n'} - S_n)_{n' \in \mathbb{N}}$ est donc une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant p.p. vers $g - S_n$. Par le TCM :
$$\|g - S_n\|_p^p = \lim_{n'\to+\infty} \int_\Omega (S_{n'} - S_n)^p \, d\mu = \lim_{n'\to+\infty} \|S_{n'} - S_n\|_p^p$$
Or, par inégalité triangulaire, $\|S_{n'} - S_n\|_p \leq \sum_{k=n+1}^{n'} \|g_k\|_p \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|g_k\|_p$.

D'où $\|g - S_n\|_p^p \leq \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|g_k\|_p\right)^p$.

Or $\sum \|g_k\|_p$ converge par hypothèse donc le membre de droite, qui est le reste de cette série, converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
10' (5'30) On en conclut $\|g - S_n\|_p^p \longrightarrow 0$.

CAS 2 : g_k sont quelconques.
* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on écrit $g_k = g_k^+ - g_k^-$ où $g_k^+ = \max(g_k, 0)$ et $g_k^- = \max(0, -g_k)$
puis on définit $S_n^+ := \sum_{k=0}^{n} g_k^+$ et $S_n^- := \sum_{k=0}^{n} g_k^-$.

On a $\|g_k^+\|_p \leq \|g_k\|_p$ et $\|g_k^-\|_p \leq \|g_k\|_p$ donc $\sum_{k=0}^{n} \|g_k^+\|_p < +\infty$ et $\sum_{k=0}^{n} \|g_k^-\|_p < +\infty$.

Par le cas précédent, S_n^+ converge vers une fonction g^+ et S_n^- vers g^-, toutes deux dans $\mathcal{L}^p$

Posons $g = g^+ - g^-$. On a, par inégalité triangulaire :

$$\|g - S_n\|_p \leq \|g^+ - S_n^+\|_p + \|g^- - S_n^-\|_p \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$\|g^+ - g^- - (S_n^+ - S_n^-)\|$

Ainsi, $(S_n)_n$ converge vers g dans $\mathcal{L}^p$.

<u>CONCLUSION</u> : En notant f la classe de g, on a que $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_n$ converge vers f dans L^p.
Toute série absolument convergente est convergente, on en déduit que L^p est complet.

14'30

$\Rightarrow$ pas faire cas $p = +\infty$ juste avoir 1 idée.

- (complet) $\Leftrightarrow$ (CVA $\Rightarrow$ CV)

$\boxed{\Rightarrow}$ (au cas où) : $\sum \|u_n\|$ Cauchy ; critère de Cauchy série + inég Δ^{le}.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\mathcal{N}$q $\exists$ ss suite cv.
$(x_n)_n$ Cauchy. $n_0 := 1$; $n_k := \inf\{n > n_{k-1},\ \forall i, i' \geq n \Rightarrow \|x_i - x_{i'}\| \leq 2^{-k}\}$.
$\Leftarrow$ ok car $(x_n)_n$ de Cauchy.
$(n_k)_k \nearrow$. ($\leadsto$ ss suite).
$\sum x_{n_k} - x_{n_{k+1}}$ CVA $\Rightarrow$ CV. $\Rightarrow (x_{n_k})$ CV $\Rightarrow (x_n)_n$ Cauchy

?

- L^∞ : Pareil $f_n \leadsto g_n$ représentant.

$(g_n)_n$ suite de Cauchy
$\Rightarrow$ cond sur $A^k_{n,m} \{x \in X,\ |g_n(x) - g_m(x)| \geq 1/k\}$; Cauchy : $\exists N_k,\ \forall n, m \geq N_k$
$\|g_n - g_m\|_\infty \leq 1/k \Rightarrow \mu(A^k_{m,n}) = 0$
$A^k := \bigcup_{n,m \geq N_k} A^k_{n,m}$ donc $\leadsto \mu(A^k) = 0$
$A := \bigcup A_k$ $\quad \mu(A) = 0$; $x \in A^c \leadsto (g_n(x))_n$ Cauchy $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $g(x)$
$\Rightarrow$ mq $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ + $\|g - g_n\|_\infty \to 0$