

ISEN NON ???

3 extensions de α .

Leçons: 106, 108, 148, 158

dupt: générateurs de $O(E)$.

106: TL1, ORAUX XENS A13.

Leçons: 106, 108, 148, 158.

[TL1]

4/30
383
(4e édité)

Lemme: Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans. Alors $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq \dim(E) - p$.

dem:

On fait une récurrence sur le nombre p d'hyperplans:

* si $p=1$, alors $\dim(H_1) = \dim(E) - 1$ par définition d'un hyperplan.

* supposons $p \geq 2$, le résultat étant vrai à l'ordre $p-1$ et soient $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E . On pose $F = \bigcap_{i=1}^{p-1} H_i$ et, d'après la formule de Grassmann on a: $\dim(F) + \dim(H_p) = \dim(F + H_p) + \dim(F \cap H_p)$.

Par HR et par définition d'hyperplan, on obtient donc:

$$n - (p-1) + n - 1 \leq \dim(F + H_p) + \dim(F \cap H_p).$$

Finalement, comme $F + H_p \subseteq E$ on a $\dim(F + H_p) \leq \dim(E) = n$.

$$\text{d'où} \quad \dim(E) - p \leq \dim(H_p \cap F)$$

Hom:

Soit $u \in O(E)$. Posons $\alpha := \text{rg}(u - \text{Id}_E)$.

u est produit d'au plus α réflexions (les réflexions engendrent $O(E)$)

dem:

On montre d'abord l'existence ^{par} d'une récurrence forte sur α .

ini: Si $\alpha=0$ alors $u = \text{Id}$ qui est un produit de 0 réflexion.
(par convention).

der: Soit $\alpha \geq 1$ tq la propriété soit vérifiée pour tout $u \in O(E)$ avec $\text{rg}(u - \text{Id}) < \alpha$ et soit $u \in O(E)$ tq $\text{rg}(u - \text{Id}) = \alpha$.

Comme $u \neq \text{Id}$ (car $\alpha \neq 0$), il existe $e \in E$ tq $u(e) \neq e$. On a alors $(u(e) - e) \perp (u(e) + e)$ car $\langle u(e) - e, u(e) + e \rangle = \|u(e)\|^2 - \|e\|^2 = 0$ car $u \in O(E)$.

On considère alors la réflexion s par rapport à $(\text{Vect}(u(e) - e))^\perp$

$$\text{qui vérifie: } \begin{cases} s(u(e) + e) = u(e) + e \\ s(u(e) - e) = -(u(e) - e) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s(u(e)) + s(e) = u(e) + e \\ s(u(e)) - s(e) = -u(e) + e \end{cases}$$

et donc $\begin{cases} s(e) = u(e) \\ s(u(e)) = e \end{cases}$ c'est à dire que s échange e et $u(e)$.

pour aller à la
leçon L159.
148

[TL1]
383 (4e édité)

[X-ENS]
p 61

Cartan-Dieudonné

[RMTG]
p 734

Pour utiliser l'HR pour $\alpha := \dim u$, on va montrer que $\operatorname{rg}(u - \operatorname{id}) \leq \alpha$
(comme u et v sont des isométries, u en est bien une par composition)

Pour cela, on a $\ker(u - \operatorname{id}) \neq \ker(v - \operatorname{id})$ (le théorème du rang nous donne ce que l'on souhaite)

Thm 9.9 L148 $\Rightarrow$ Soit $x \in \ker(u - \operatorname{id})$, i.e. $u(x) = x$. On a $v(u(x)) = v(x) = x$
 $\langle x, u(x) - x \rangle = \langle x, u(x) \rangle - \langle x, x \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle - \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle = 0$
donc $x \in \operatorname{Vect}(u(x) - x)^\perp$ et on a par définition de v , $v(x) = x$
d'où $v(x) = x$. On a alors $\ker(u - \operatorname{id}) \subset \ker(v - \operatorname{id})$.

De plus, $v \in \ker(v - \operatorname{id}) \setminus \ker(u - \operatorname{id})$ d'où l'inclusion stricte.

On a donc $\operatorname{rg}(v - \operatorname{id}) < \alpha$ et par HR, il existe $s_1, \dots, s_p$ des réflexions de E tels que $v = s_1 \circ \dots \circ s_p$ et $p \leq \operatorname{rg}(v - \operatorname{id})$.

donc $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$ qui est donc un produit de $p+1$ réflexions avec $p+1 \leq \alpha$. L'hérédité est vérifiée.

L153 L148 En fait $\alpha = \operatorname{rg}(u - \operatorname{id})$ est le nombre minimal de réflexions que l'on doit avoir dans une décomposition $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$.

En effet si $u \in O(E)$ s'écrit $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$ où s_i est la réflexion par rapport à l'hyperplan H_i , on a $H_1 \cap \dots \cap H_p \subset \ker(u - \operatorname{id})$

et $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq \dim E - p$ (par notre lemme) d'où
 $\alpha = \operatorname{rg}(u - \operatorname{id}) \leq p$. (par le théorème du rang).

L111 $\Rightarrow$ $\dim O^+(E)$
170