

donc : moyennes itérées

logos : 148, 151, 156.

ref : Boichuy - Algèbre le grand combat (p 78).

adec : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $\alpha \geq 1$.

prop : i) $\forall i \geq \alpha$ $\ker(u^i) = E$.
ii) $\forall i \in [1, \alpha]$ $\ker(u^{i-1}) \subsetneq \ker(u^i)$

dem :

i) Soit $i \geq \alpha$. $u^i = 0$ donc $\ker(u^i) = E$.

ii) Soit $i \in [1, \alpha]$. On a déjà $\ker(u^{i-1}) \subset \ker(u^i)$ car u endom.

On veut donc montrer que les ensembles sont différents.

Supposons par l'absurde que $\ker(u^{i-1}) = \ker(u^i)$.

On s'intéresse à $\ker(u^{i+1})$

Soit $x \in \ker(u^{i+1})$.

$$u^{i+1}(x) = 0 \Leftrightarrow u^i(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) \in \ker(u^i) \Leftrightarrow u(x) \in \ker(u^{i-1}) \Leftrightarrow u^i(u(x)) = 0.$$

d'où $x \in \ker(u^i)$

ainsi $\ker(u^{i+1}) = \ker(u^i)$ l'autre inclusion vient encore du fait que u endom.

On a donc : $\ker(u^{i-1}) = \ker(u^i) = \ker(u^{i+1}) = \dots = \ker(u^\alpha) = E$.

D'où $u^{i-1} = 0$ mais $i-1 < \alpha$: ABSURDE.

On a donc que $\ker(u^{i-1}) \subsetneq \ker(u^i)$.

prop : il existe des sev $F_0, \dots, F_{\alpha+1}$ de E tels que tout $i \in [1, \alpha+1]$,

i) $\ker(u^i) = \ker(u^{i-1}) \oplus F_i$

ii) $u(F_i) \subset F_{i-1}$.

dem :

On va les construire par récurrence descendante.

$\mathcal{P}(p) : \exists F_i$ tels que si $p > 0$, $\forall i \in [p, \alpha+1]$, $\ker(u^i) = \ker(u^{i-1}) \oplus F_i$,
* si $p < \alpha+1$, $\forall i \in [p+1, \alpha+1]$, $u(F_i) \subset F_{i-1}$.

• $F_{\alpha+1}$: $\ker(u^{\alpha+1}) = E = \ker(u^\alpha)$ car u nilp d'indice α .
on peut donc prendre $F_{\alpha+1} = \{0\}$.

• F_i , $i \in [1, \alpha]$: Soit $i \in [2, \alpha+1]$. Supposons F_i construit et construisons F_{i-1} .

On cherche complémenaire de $\ker(u^{i-2})$ dans $\ker(u^{i-1})$ et on voit qu'il contient $u(F_i)$

On commence donc par regarder $\ker(u^{i-2}) + u(F_i)$

* On a déjà $\ker(u^{i-2}) \subset \ker(u^{i-1})$ par la proposition précédente.

* De plus $u(F_i) \subset \ker(u^{i-1})$:

Soit $x \in u(F_i)$: $\exists y \in F_i$, $u(y) = x$.

$$u^{i-1}(x) = u^i(y) = 0$$

car $y \in F_i \subset \ker(u^i)$ d'où $u^{i-1}(x) = 0$ et $x \in \ker(u^{i-1})$.

* On a alors $\ker(u^{i-2}) + u(F_i) \subset \ker(u^{i-1})$, or la somme est directe

Soit $x \in \ker(u^{i-2}) \cap u(F_i)$.

* $\exists y \in F_i$, $u(y) = x$.

* $u^{i-2}(x) = 0 \Leftrightarrow u^{i-1}(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \ker(u^{i-1}) \cap F_i = \{0\}$ par construit F_i .

Donc $x = u(0) = 0$.

Ainsi $\ker(u^{i-2}) \oplus u(F_i) \subset \ker(u^{i-1})$.

* Considérons $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(u^{i-2})$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $u(F_i)$.

$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une famille libre de $\ker(u^{i-1})$ donc on peut la compléter

en une base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ (par le théorème de la base incomplète).

En posant $F_{i-1} := \text{Vect}(\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3)$ on a donc $u(F_i) \subset F_{i-1}$ car une base

de $u(F_i)$ est inclus dans F_{i-1} , et $\ker(u^{i-2}) \oplus F_{i-1} = \ker(u^{i-1})$ (par construction).

• F_0 : $\ker(u^0) = \ker(\text{id}) = \{0\}$
 donc $F_1 = F_0 \oplus \{0\} = \ker(u)$.
 $u(F_1) = \{0\}$
 donc $F_0 := \{0\}$ convient.

Cette prop nous dit que $u|_{F_i}$ est inj.

prop: u admet une base de Jordan.

Par la prop précédente: i) $u|_{F_i}$ est injective pour $i \geq 2$. $\alpha \ker(u) \cap F_i \subset F_{i-1} \cap \ker(u^{i-1}) = \{0\}$.

ii) $E = \ker(u^{i-1}) \oplus F_{i-1} = \dots = F_1 \oplus \dots \oplus F_{i-1}$. car $F_0 = \{0\}$.

On pose, $\forall i \in [1, i]$ $d_i := \dim(\ker(u^i)) - \dim(\ker(u^{i-1})) = \dim(F_i)$
 (par prop $\oplus$).

On construit par récurrence descendante une base de F_{i-1} pour tout $i \in [1, i]$, l'appropriée.

* ini: Soit $(e_1^{i-1}, \dots, e_{d_{i-1}}^{i-1})$ une base de F_{i-1} (quelconque).

* hér: Supposons avoir construit $(e_1^{i-1}, \dots, e_{d_{i-1}}^{i-1})$ une base de F_{i-1} .

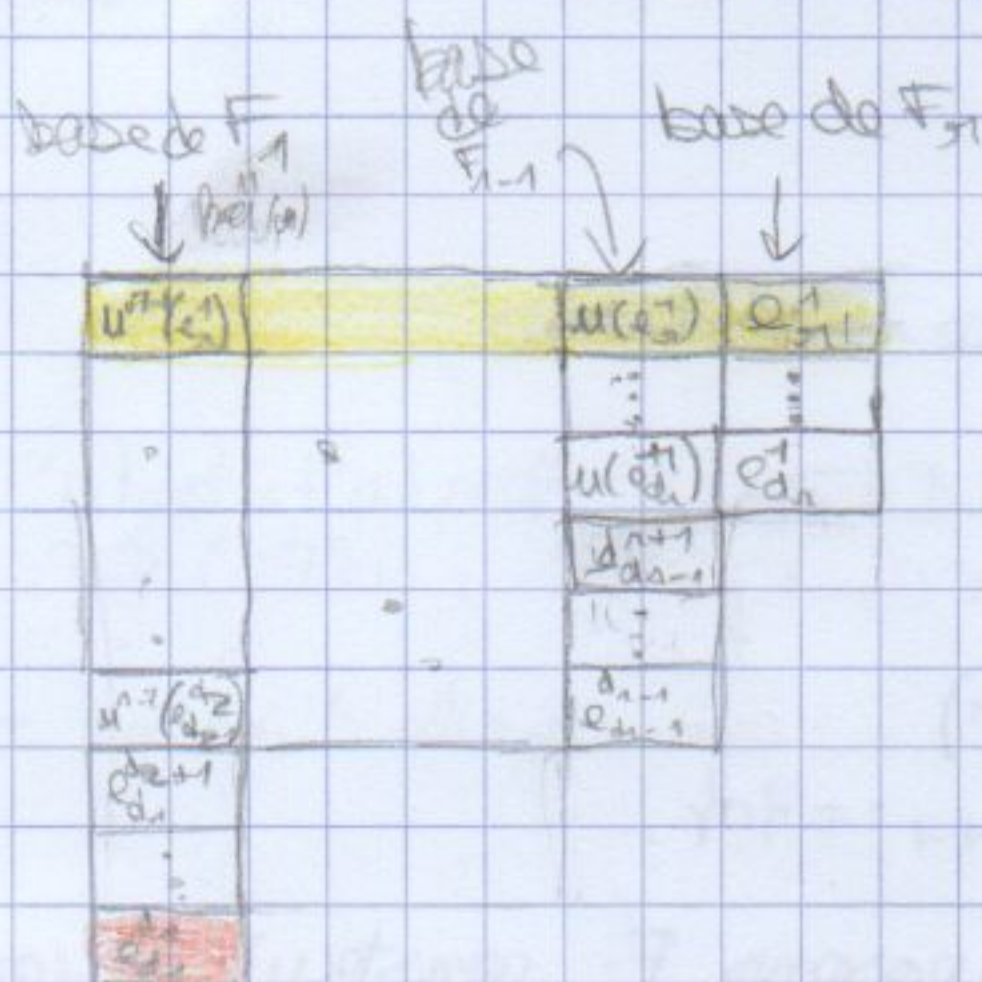
$u|_{F_i}$ est injective donc on pose: $\forall j \in [1, d_i]$ $e_j^{i-1} := u(e_j^i)$

on a $(e_1^{i-1}, \dots, e_{d_{i-1}}^{i-1})$ qui est une famille libre de F_{i-1} .

On la complète alors en une base $(e_1^{i-1}, \dots, e_{d_{i-1}}^{i-1})$ par le thm de la base incomplète.

$(e_1^1, \dots, e_{d_1}^1, \dots, e_1^{i-1}, \dots, e_{d_{i-1}}^{i-1})$ est alors une base de E qui est une base de Jordan.

Représentons-le avec un tableau de Young.

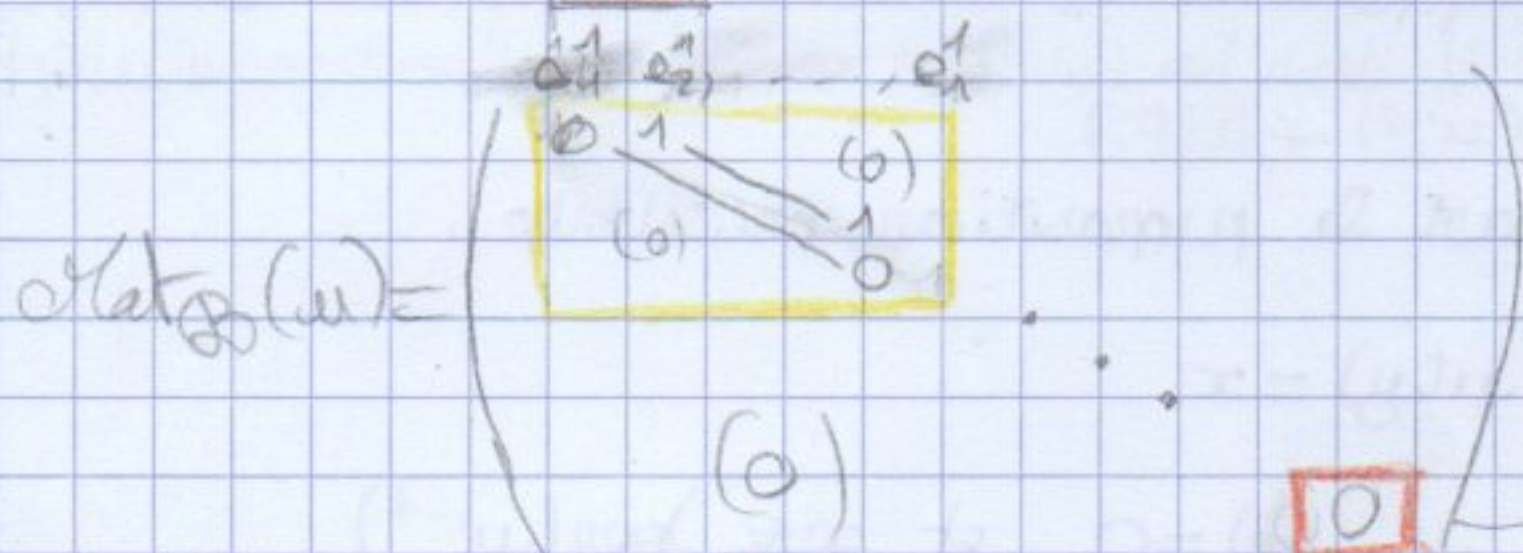


$\dim E = \text{nbr de case}$.

Nbr de lignes = $\dim(\ker(u))$

$rg = \text{nbr de case privé de sa 1ère colonne}$
 $\Rightarrow m \text{ tableau} \Rightarrow m \text{ rang}$

1 ligne du tableau $\Rightarrow$ 1 bloc de matrice



dans notre ex mais p 2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ etc.