32 $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$

Ref : Brézis en anglais p.109.

THÉORÈME 32.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans Ω.*

PREUVE. idée : On va procéder par convolution par une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}^n$, puis traiter le cas d'un ouvert quelconque Ω par troncature. On admet le fait que $\mathcal{C}_c^0$ est dense dans L^p (provient de la régularité de la mesure de Lebesgue). On se donne une approximation de l'unité ρ_n, vérifiant :

$$\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \mathrm{supp}(\rho_n) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{n}), \quad \int \rho_n = 1, \quad \rho_n \geq 0$$

LEMME 32.2 *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$, alors $\rho_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformément sur tout compact.*

PREUVE. Soit K un compact et $\epsilon > 0$. Par le théorème de Heine, f étant continue sur le ϵ-voisinage compact de K, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x-y) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in K, \forall y \in B(0,\delta)$$

Ecrivons alors, pour $x \in \mathbb{R}^N$,

$$(\rho_n * f)(x) - f(x) = \int (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\mathrm{d}y = \int_{B(0,\frac{1}{n})} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\mathrm{d}y$$

Pour $n > \frac{1}{\delta}$ et $x \in K$, on trouve :

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \epsilon \int \rho_n = \epsilon$$

□

Traitons le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$:

Soit $\epsilon > 0$, on utilise la densité de $\mathcal{C}_c^0$ dans L^p : soit $f_1 \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ tel que $\|f - f_1\|_1 < \epsilon$.

D'après le lemme, $\rho_n * f_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_1$ uniformément sur les compacts. Comme ρ_n et f_1 sont à supports compacts, cette convergence est globale :

$$\mathrm{supp}(\rho_n * f_1) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{n}) + \mathrm{supp}(f_1) \subset \overline{B}(0,1) + \mathrm{supp}\, f_1$$

Cette dernière partie est compacte, donc on a convergence uniforme sur ce compacte, donc convergence L^p :

$$\|\rho_n * f_1 - f_1\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Reste à faire un coup d'inégalité triangulaire :

$$\|\rho_n * f - f\|_p \leq \|\rho_n * (f - f_1)\|_p + \|\rho_n * f_1 - f_1\| + \|f_1 - f\|$$

Par l'inégalité de young, $\|\rho_n * (f - f_1)\|_p \leq \|f - f_1\|_p$.

En passant à la limité supérieure, on trouve :

$$\limsup_{n\to\infty} \|\rho_n * f - f\|_p \leq 2\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

D'où :

$$\rho_n * f \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ dans } L^p$$

Cas d'un ouvert Ω quelconque :

La difficulté supplémentaire est que $\rho_n * f$ n'est pas à support dans Ω mais dans $\Omega + \overline{B}(0, \frac{1}{n})$. On va d'abord réduire un peu le support de f puis convoler par ρ_n de telle sorte qu'on reste à support dans Ω.

Prenons $f \in L^p(\Omega)$ qu'on étend sur $\mathbb{R}^N$ en posant $f = 0$ hors de Ω. Prenons un exhaustion de Ω par des compacts :

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^N | d(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq \frac{2}{n}\}$$

Comme Ω est ouvert, pour tout $x \in \Omega$, $d(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) < 0$.

On pose alors $f_n = \mathbb{1}_{K_n} f$ si bien que :

$$\text{supp}(\rho_n * f_n) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{n}) + K_n \subset \Omega$$

Donc $\rho_n * f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on a :

$$\begin{aligned} \|\rho_n * f_n - f\|_{L^p(\Omega)} &= \|\rho_n * f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|\rho_n * f_n - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

Par convergence dominée, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, et par le lemme, $\rho_n * f \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. D'où $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $L^p(\Omega)$. □