

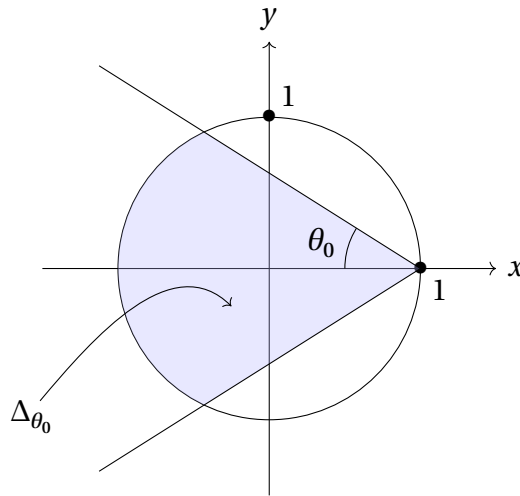
Théorème d'Abel angulaire

On montre le théorème d'Abel "angulaire", qui permet d'intervertir certaines sommes et limites, et on l'applique justement au calcul de deux sommes.

THÉORÈME 1

Abel angulaire.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque unité D de $\mathbb{C}$. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D \mid \exists \rho > 0 \text{ et } \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$.



Alors $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration. On note $\forall n \in \mathbb{N}, S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n, S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $R_n = S - S_n$. On cherche à majorer $|f(z) - S|$; on va effectuer une transformation d'Abel en écrivant $\forall n \geq 1, a_n = R_{n-1} - R_n$. Soit $z \in D \setminus \{0\}$. $\forall N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N &= \sum_{n=0}^N a_n (z^n - 1) \\ &= \sum_{n=1}^N (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^N R_n (z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\ &= (z - 1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1) \end{aligned}$$

Donc en faisant $N \rightarrow +\infty$:

$$f(z) - S = (z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \quad (*)$$

Soit $\epsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|R_n| < \epsilon$. D'après (*), $\forall z \in D$,

$$\begin{aligned} |f(z) - S| &\leq |z - 1| \left| \sum_{n=0}^N R_n z^n \right| + \epsilon |z - 1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \right) \\ &\leq |z - 1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) + \epsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|} \end{aligned} \quad (**)$$

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$ de sorte que $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $|\theta| \leq \theta_0$. Notons avant toute chose que $|z - 1| = \rho$. Cherchons maintenant des conditions sur z pour majorer les deux termes :

• On a :

$$\begin{aligned} |z|^2 &= (1 - \rho \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\theta))^2 \\ &= 1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) \\ &= 1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2 \end{aligned}$$

En supposant $\rho \leq \cos(\theta_0)$, cela permet de majorer le deuxième terme de (**):

$$\begin{aligned} \frac{|z - 1|}{1 - |z|} &= \frac{|z - 1|}{1 - |z|^2} (1 + |z|) \\ &= \frac{\rho}{2\rho \cos(\theta) - \rho^2} (1 + |z|) \\ &\leq \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho} \\ &\leq \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \\ &= \frac{2}{\cos(\theta_0)} \end{aligned}$$

• Soit $\alpha > 0$ suffisamment petit pour que $\alpha \sum_{n=0}^N |R_n| < \epsilon$. Si $z \in \Delta_{\theta_0}$ tel que $|z - 1| \leq \alpha$, alors on peut majorer le premier terme de (**):

$$|z - 1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) \leq \alpha \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) < \epsilon$$

Donc, en faisant $z \rightarrow 1$ tel que $z \in \Delta_{\theta_0}$ (on aura bien $\rho = |z - 1| \leq \inf\{\alpha, \cos(\theta_0)\}$), et en injectant les deux majorations trouvées dans (**):

$$|f(z) - S| \leq \epsilon + \epsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)} = \epsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right)$$

d'où le résultat. □

APPLICATION 2

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

Démonstration. En appliquant le Théorème 1 :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^n \\
 &\stackrel{x>0}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \sqrt{x}^{2n+1} \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan(\sqrt{x}) \\
 &= \arctan(1) \\
 &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

□

La preuve de l'application précédente écrite dans [GOU20] est un peu lacunaire. Merci aux personnes qui l'ont signalée et corrigée.

APPLICATION 3

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

Démonstration. Toujours en appliquant le Théorème 1 :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln(1+x) \\
 &= \ln(2)
 \end{aligned}$$

□

Bibliographie

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.