

Lemme de Morse

En usant (certains diront plutôt “en abusant”) du théorème d'inversion locale, on montre le lemme de Morse et on l'applique à l'étude de la position d'une surface par rapport à son plan tangent.

NOTATION 1

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une application dont toutes les dérivées secondes existent, on note $\text{Hess}(f)_a$ la hessienne de f au point a .

LEMME 2

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$$

[ROU]
p. 209

Démonstration. On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto {}^tMA_0M \end{aligned}$$

qui est une application polynomiale en les coefficients de M , donc de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On calcule :

$$\begin{aligned} \varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &= {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0 + H \\ &= {}^t(A_0H) + A_0H + o(\|H\|^2) \end{aligned}$$

où $(\|\cdot\|)$ désigne une quelconque norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, on a $d\varphi_{I_n}(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$. D'où

$$\text{Ker}(d\varphi_{I_n}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

On définit donc

$$F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

et on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Ker}(d\varphi_{I_n})$. Ainsi, la différentielle $d(\varphi|_F)_{I_n}$ est bijective (car $\text{Ker}(d(\varphi|_F)_{I_n}) = \text{Ker}(d\varphi_{I_n}) \cap F = \{0\}$).

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale à $\varphi|_F$: il existe U un voisinage ouvert de I_n dans F tel que $(\varphi|_U)$ soit $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur $V = \varphi(U)$. De plus, on peut supposer $U \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{R})$ (quitte à considérer $U \cap U'$ où U' est un voisinage ouvert de I_n dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$; qui existe par continuité de $\det$).

Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \varphi(I_n)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall A \in V, A = {}^t(\varphi|_U)^{-1}(A)A_0(\varphi|_U)^{-1}(A)$$

Il suffit alors de poser $\psi = (\varphi|_U)^{-1}$ (qui est bien une application de classe $\mathcal{C}^1$) pour avoir le résultat demandé. $\square$

LEMME 3**Lemme de Morse.**

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose :

- $df_0 = 0$.
- La matrice symétrique $\text{Hess}(f)_0$ est inversible.
- La signature de $\text{Hess}(f)_0$ est $(p, n - p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathcal{C}^1$ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\phi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^n \phi_k^2(x)$$

Démonstration. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0, qui donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + df_0(x) + \int_0^1 (1-t) d^2 f_{tx}(x, x) dt \\ \Leftrightarrow f(x) - f(0) &= {}^t x Q(x) x \end{aligned} \quad (*)$$

où $Q(x)$ est la matrice symétrique définie par $Q(x) = \int_0^1 (1-t) \text{Hess} f_{tx} dt$ (qui est une application $\mathcal{C}^1$ sur U car f est $\mathcal{C}^3$ sur U).

Par hypothèse, $Q(0) = \frac{\text{Hess}(f)_0}{2}$ est une matrice symétrique inversible, donc en vertu du Lemme 2, il existe un voisinage V_1 de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V_1 \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que :

$$\forall A \in V_1, A = {}^t \psi(A) Q(0) \psi(A)$$

Mais, l'application $x \mapsto Q(x)$ est continue sur U (puisque f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur U), donc il existe V_2 voisinage de 0 dans U tel que $\forall x \in V_2, Q(x) \in V_1$. On peut donc définir l'application $M = \psi \circ Q|_{V_2}$, qui nous permet d'écrire

$$\forall x \in V_2, Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x) \quad (**)$$

Or, $Q(0)$ est de signature $(p, n - p)$, donc d'après la loi d'inertie de Sylvester, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$Q(0) = {}^t P \underbrace{\begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{n-p} \end{pmatrix}}_{=D} P \quad (***)$$

Finalement en combinant (*) avec (**) et (***), cela donne

$$\begin{aligned} \forall x \in V_2, f(x) - f(0) &= {}^t (PM(x)x) D (PM(x)x) \\ \Leftrightarrow \varphi(x) = PM(x)x \quad \forall x \in V_2, f(x) - f(0) &= {}^t \varphi(x) D \varphi(x) \end{aligned}$$

ce qui est bien l'expression voulue.

Il reste à montrer que φ définit bien un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ entre deux voisinages de l'origine. Notons déjà que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ car M l'est. Calculons la différentielle en 0 de φ . Soit $h \in V_2$;

$$\begin{aligned}\varphi(h) - \varphi(0) &= PM(h)h \\ &= P(M(0) + dM_0(h) + o(\|h\|))h \\ &= PM(0)h + o(\|h\|)\end{aligned}$$

d'où $d\varphi_0(h) = PM(0)h$. Or, $PM(0)$ est inversible, donc en particulier, $d\varphi_0$ l'est aussi. On peut appliquer le théorème d'inversion locale à φ , qui donne l'existence de deux ouverts V et W contenant l'origine (car $\varphi(0) = 0$) tel que $\phi = \varphi|_V$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de V sur W . $\square$

APPLICATION 4

Soit S la surface d'équation $z = f(x, y)$ où f est de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique d^2f_0 non dégénérée. Alors, en notant P le plan tangent à S en 0 :

- (i) Si d^2f_0 est de signature $(2, 0)$, alors S est au-dessus de P au voisinage de 0.
- (ii) Si d^2f_0 est de signature $(0, 2)$, alors S est en-dessous de P au voisinage de 0.
- (iii) Si d^2f_0 est de signature $(1, 1)$, alors S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

Démonstration. Une équation cartésienne de P est donnée par

$$z - 0 = f(0) + df_0(x, y)$$

La différence d'altitude entre la surface S et le plan tangent P au point $h \in \mathbb{R}^2$ est donc donnée par

$$\delta(h) = f(h) - (f(0) + df_0(h))$$

et le Lemme 3 permet d'écrire

$$\delta(h) = \alpha\phi_1(h)^2 + \beta\phi_2(h)^2$$

où (α, β) désigne la signature de d^2f_0 et $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^2$. En particulier, ϕ_1 et ϕ_2 ne s'annulent simultanément qu'en 0.

- (i) Si d^2f_a est de signature $(2, 0)$, on a $\delta(h) > 0$ pour h voisin de 0 et $h \neq 0$.
- (ii) Si d^2f_a est de signature $(0, 2)$, on a $\delta(h) < 0$ pour h voisin de 0 et $h \neq 0$.
- (iii) Si d^2f_a est de signature $(1, 1)$, on a $\delta(h) = \phi_1(h)^2 - \phi_2(h)^2$ et S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

$\square$

Bibliographie

Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4^e éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.