

## $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est surjective

Dans ce développement, on démontre que l'exponentielle de matrices est surjective en utilisant des théorèmes d'analyse.

### LEMME 1

Soit  $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $M^{-1} \in \mathbb{C}[X]$  (ie.  $M^{-1}$  est un polynôme en  $M$ ).

*Démonstration.* D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\chi_M(M) = 0$ . Or, en notant  $\chi_M = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , on a  $a_0 = (-1)^n \det(M)$ , d'où

$$0 = M^n + \cdots + a_1 M + (-1)^n \det(M) I_n$$

En notant  $Q = X^{n-1} + a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + a_2 X + a_1$ , on en déduit que  $(-1)^{n+1} \det(M) I_n = Q(M)M$ . D'où

$$M^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(M)} Q(M) \in \mathbb{C}[M]$$

ce qu'il fallait démontrer. □

### LEMME 2

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors,  $\exp(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ .

*Démonstration.*  $M$  et  $-M$  commutent, donc

$$\exp(M) \exp(-M) = \exp(M - M) = I_n = \exp(-M) \exp(M)$$

Ainsi  $\exp(M)$  est inversible, d'inverse  $\exp(-M)$ . □

### NOTATION 3

Soit  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $\mathbb{C}[C]^* = \mathbb{C}[C] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ .

### LEMME 4

Soit  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .  $\mathbb{C}[C]^*$  est un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ .

*Démonstration.* •  $I_n \in \mathbb{C}[C]$  et  $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ , donc  $I_n \in \mathbb{C}[C]^*$ .

- Soit  $M \in \mathbb{C}[C]^*$ . Comme  $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ,  $M^{-1}$  existe, est inversible, et, par le Lemme 1,  $M^{-1} \in \mathbb{C}[C]$ .
  - Enfin,  $\mathbb{C}[C]^*$  est clairement stable par multiplication.
- 

### LEMME 5

$\exp$  est différentiable en 0 et,

$$d\exp_0 = I_n$$

*Démonstration.* Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

$$\begin{aligned} \exp(0 + H) - \exp(H) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \\ &= I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \end{aligned}$$

Soit  $\|\cdot\|$  une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On a :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \left\| \frac{H^k}{k!} \right\| \\ &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} \\ &= e^{\|H\|} - \|H\| - 1 \end{aligned}$$

En effectuant un développement limité de l'exponentielle réelle à l'origine, on obtient bien  $\left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| = o(\|H\|)$ .  $\square$

#### THÉORÈME 6

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  est surjective.

*Démonstration.* Fixons  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  pour le reste de la démonstration. Comme  $\mathbb{C}[C]$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , il est de dimension finie et est donc fermé. En particulier,  $\exp(C) \in \mathbb{C}[C]$ . Le Lemme 2 combiné au Lemme 4, nous dit que  $\exp : \mathbb{C}[C] \rightarrow \mathbb{C}[C]^*$  est bien définie. Il s'agit de plus d'un morphisme de groupes. En effet,  $\forall A, B \in \mathbb{C}[C]$ , on a  $AB = BA$ , d'où  $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B) = \exp(B)\exp(A)$ .

Montrons que  $\mathbb{C}[C]^*$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{C}[C]$ . Notons qu'il s'agit bien d'un ouvert de  $\mathbb{C}[C]$ , car c'est l'intersection de  $\mathbb{C}[C]$  avec  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  qui est ouvert dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Ensuite, soient  $A, B \in \mathbb{C}[C]^*$ . On pose

$$P = \det((1 - X)A + XB)$$

$P$  ne s'annule ni en 0, ni en 1 par inversibilité de  $A$  et  $B$ .  $P$  a un nombre fini de racines car n'est pas nul : on peut trouver une fonction continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  qui évite ces racines. Ainsi,

$$\forall t \in [0, 1], (1 - \gamma(t))A + \gamma(t)B \in \mathbb{C}[C]^*$$

donc  $\mathbb{C}[C]^*$  est connexe par arcs, donc est en particulier connexe.

Il s'agit maintenant de montrer que  $\exp(\mathbb{C}[C])$  est un ouvert-fermé de  $\mathbb{C}[C]^*$ . Commençons par montrer qu'il est ouvert en montrant qu'il contient un voisinage de chacun de ses points. Par le théorème d'inversion locale appliqué à  $\exp : \mathbb{C}[C] \rightarrow \mathbb{C}[C]$  (qui est bien  $\mathcal{C}^1$  sur l'espace de Banach  $\mathbb{C}[C]$  et, par le Lemme 5,  $\det(d\exp_0) \neq 0$ ) : il existe  $U$  un voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}[C]$  et un ouvert  $V$  de  $\mathbb{C}[C]$  contenant  $\exp(0) = I_n$  tels que  $\exp : U \rightarrow V$  soit un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit

$A \in \mathbb{C}[C]$ . Posons

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[C] & \rightarrow & \mathbb{C}[C] \\ M & \mapsto & \exp(A)^{-1}M \end{array}$$

et montrons que  $\exp(A)V = f^{-1}(V)$ . Pour tout  $B \in V$ ,  $f_A(\exp(A)B) = \exp(A)^{-1}(\exp(A)B) = B \in V$ , donc  $\exp(A)V \subseteq f^{-1}(V)$ .

Soit  $B \in f^{-1}(V)$ , alors  $f_A(B) \in V$ . Or,  $f_A(B) = \exp(A)^{-1}B$ , donc  $B = \exp(A)f_A(B) \in \exp(A)V$ . On en déduit que  $\exp(A)V = f^{-1}(V)$  et que  $\exp(A)V$  est un ouvert par continuité de  $f$ .

Comme  $V$  contient  $I_n$ ,  $\exp(A)V$  est un voisinage de  $\exp(A)$ . Or,  $\exp(A)V$  est inclus dans  $\mathbb{C}[C]$  car pour tout  $B \in V$ , il existe  $M \in \mathbb{C}[C]$  tel que  $\exp(M) = B$ . Ainsi,

$$\exp(A)V = \exp(A)\exp(M) = \exp(A+M) \in \exp(\mathbb{C}[C])$$

On en déduit que  $\exp(\mathbb{C}[C])$  est un ouvert.

Posons maintenant  $O = \mathbb{C}[C]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[C])$  et montrons que

$$O = \bigcup_{A \in O} A \exp(\mathbb{C}[C]) \quad (*)$$

Soient  $A \in O$  et  $B \in \exp(\mathbb{C}[C])$ . Alors  $AB \in \mathbb{C}[C]^*$ . Supposons par l'absurde que  $AB \in \exp(\mathbb{C}[C])$ . Il existe donc  $M \in \exp(\mathbb{C}[C])$  tel que  $AB = M$  et  $A = MB^{-1}$ . Comme  $\exp(\mathbb{C}[C])$  est un groupe multiplicatif, alors  $A \in \exp(\mathbb{C}[C])$  : absurde. On conclut que

$$\bigcup_{A \in O} A \exp(\mathbb{C}[C]) \subseteq O$$

Réciproquement, supposons que  $M \in O$ . Comme  $I_n \in \exp(\mathbb{C}[C])$ , alors  $M \in M \exp(\mathbb{C}[C])$ . On en déduit (\*), ainsi que la fermeture de  $\exp(\mathbb{C}[M])$  par passage au complémentaire.

$\exp(\mathbb{C}[M])$  est un ouvert fermé non vide (car contient  $I_n$ ) de  $\mathbb{C}[M]^*$ , alors  $\exp(\mathbb{C}[M]) = \mathbb{C}[M]^*$ . Pour conclure, si  $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ , alors  $M \in \mathbb{C}[M]$  et donc  $M \in \mathbb{C}[M]^*$ . Ainsi,  $M \in \exp(\mathbb{C}[M])$ , et  $\exp$  est bien surjective.  $\square$

#### APPLICATION 7

$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ , où  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$  désigne les carrés de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors,

$$\exp(M) = \exp\left(\frac{M}{2}\right)^2$$

d'où  $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ . Réciproquement, soit  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ . Posons  $B = A^2$ . D'après le Théorème 6,

$$\exists P \in \mathbb{C}[X] \text{ telle que } A = \exp(P(A))$$

Comme  $A$  est une matrice réelle, alors en passant au conjugué, on obtient  $A = \exp(\overline{P}(A))$ . Ainsi,

$$B = A^2 = \exp((P + \overline{P})(A)) \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$$

d'où  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2 \subseteq \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ .

□

# Bibliographie

**L'oral à l'agrégation de mathématiques**

**[I-P]**

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.