leçons : 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.	Banach - Steinhaus et série de Fourier qui diverge 25	Références : Gourdon "Analyse"

Thm (Banach- Steinhaus)

E Banach, F evn, $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de la norme triple $|||f||| = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$

Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. Alors ou bien H est bornée (ie $\exists M>0 \ \forall f\in H \ |||f||| \leq M$)

ou bien $\exists\ \Omega$ un G_δ dense tq $\forall x\in\Omega \quad \sup_{f\in H} \|f(x)\|_F = +\infty$

preuve : Soit $k\in\mathbb{N}$. On pose $\Omega_k = \{ x\in E \mid \sup_{f\in H} \|f(x)\|_F > k \}$

Ω_k est un ouvert par continuité des $f\in H$.

- 1er cas : $\forall k\geq 0 \quad \Omega_k$ dense dans E

Alors, E étant complet, $\Omega = \bigcap_{k\geq 0} \Omega_k$ est un G_δ dense par Baire.

Soit $x\in\Omega$: $\forall k\geq 0 \ \sup_{f\in H} \|f(x)\|_F > k$ donc $\sup_{f\in H} \|f(x)\|_F = +\infty$

- 2e cas : $\exists k\geq 0 \ \Omega_k$ n'est pas dense dans E

Alors $\exists x_0\in E \ \exists \rho>0 \quad B(x_0,\rho)\cap\Omega_k = \emptyset$

$\forall x\in B(0,\rho) \quad \forall f\in H \quad \|f(x_0+x)\|_F \leq k$

$\forall f\in H \ \forall x\in B(0,\rho) \quad \|f(x)\|_F = \|f(x_0+x) - f(x_0)\|_F \leq 2k$

D'où H bornée.

Application : On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques et continues.

Pour $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$, on note $c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}\,dt$

On pose $S_n : \begin{cases} \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathcal{C}_{2\pi} \\ f \mapsto t\mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt} \end{cases}$ et $\ell_n : \begin{cases} \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C} \\ f\mapsto S_n(f)(0) \end{cases}$

Alors $\exists f\in\mathcal{C}_{2\pi} \mid \sup_{n\geq 0} |S_n(f)(0)| = +\infty$.

preuve :

① $\forall n \ \ell_n$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}$. Mq $\forall n \ \ell_n$ est continue.

Soit $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$ $\ell_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}\,dt$

$\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int}\frac{1-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{it}} = e^{-int}\frac{e^{\frac{i(2n+1)t}{2}} - e^{-\frac{i(2n+1)t}{2}}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \frac{e^{\frac{i(2n+1)t}{2}}}{e^{it/2}} = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$

$\forall \|f\|_\infty \leq 1 \quad |\ell_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin \frac{2n+1}{2} t|}{|\sin \frac{t}{2}|}\, dt$ donc $|||\ell_n||| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt$

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \dfrac{D_n(t)}{|D_n(t)|+\varepsilon} \end{cases}$ où $D_n(t) = \dfrac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$

On a $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ et $|\ell_n(f_\varepsilon)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)|+\varepsilon}\, dt \right|$

$$\xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt$$ par convergence dominée.

D'où $|||\ell_n||| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin \frac{2n+1}{2} t|}{|\sin \frac{t}{2}|}\, dt$ et ℓ_n continue.

② <u>Etude de $|||\ell_n|||$:</u>

On a, $\forall t \in \mathbb{R} \quad |\sin \frac{t}{2}| \leq |\frac{t}{2}|$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |||\ell_n||| \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin \frac{2n+1}{2} t|}{|t/2|}\, dt \underset{\frac{2n+1}{2}t = u}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2n+1}{2}\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \left|\frac{\sin u}{\frac{u}{2n+1}}\right| \frac{2\,du}{2n+1}$

$$\underset{\text{parité}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du$$

D'où $\sup_{n \geq 1} |||\ell_n||| \geq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du$

Or $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du \geq \frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin u|\, du = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin u\, du = \frac{2}{n\pi}$

et $\sum \frac{1}{n}$ diverge

donc $\sup_{n \geq 1} |||\ell_n||| = +\infty$

$\mathcal{C}_{2\pi}$ est complet car fermé dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ complet.

Par Banach-Steinhaus : $\exists f \in \mathcal{C}_{2\pi} \quad \sup_{n \geq 1} |\ell_n(f)| = +\infty$

La série de Fourier de f en 0 diverge.