Fonctions de Hermite

ma_tilde

Théorème : La famille $(\frac{h_n}{\|h_n\|})_{n\in\mathbb{N}}$.

Cadre : On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \text{ et } h_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On suppose que l'on a déjà acquis le résultat $(h_n)_n$ est une famille orthogonale.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. La famille $(e_i)_i$ est une base hilbertienne si et seulement si :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), (\forall i \in I < e_i, f >= 0) \implies f = 0$$

Preuve :

Pour démontrer le résultat souhaité, on va utiliser la propriété suivante :

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. La famille $(e_i)_i$ est une base hilbertienne si et seulement si :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), (\forall i \in I < e_i, f >= 0) \implies f = 0$$

Prenons alors $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $< \frac{h_n}{\|h_n\|}, f >= 0$ et montrons que f est la fonction nulle. Or :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, < \frac{h_n}{\|h_n\|}, f >= 0 &\iff \forall n \in \mathbb{N}, < h_n, f >= 0 \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} H_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}} f(t)dt = 0 \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} f(t)dt = 0
\end{aligned}$$

La dernière égalité venant du fait que $(H_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$ tout comme $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ceci étant dit, on va désormais étudier $\tau : z \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itz}dt$. En prenant $z \in \mathbb{R}$, on reconnaît la transformée de Fourier de la fonction $\tilde{f} : t \mapsto f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} \in L^1$. Cependant nous allons tout d'abord étudier cette fonction sur $\mathbb{C}$ et utiliser des résultats d'analyse complexe.

Voyons tout d'abord que cette fonction est bien définie. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itz}|dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (e^{-\frac{t^2}{2} + Im(z)t})^2\right)^{1/2}$$

$f \in L^2$ donc la première intégrale est fini. Quant à la deuxième, le terme est équivalent à e^{-t^2} ce qui nous permet de conclure.

Passons alors au critère holomorphe de τ, qui nous le verrons, nous permettra de dire beaucoup de choses. Pour montrer l'holomorphie, on va chercher à utiliser le théorème d'holomorphie. Posons alors $g : (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mapsto f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itz}$ et vérifions les 3 hypothèses du théorème :

1. $\forall z \in \mathbb{C},\ t \mapsto g(t, z)$ est mesurable car f l'est (et l'exponentielle également)
2. $\forall t \in \mathbb{R},\ z \mapsto g(t, z)$ est holomorphe car l'exponentielle l'est
3. Considérons un compact K de $\mathbb{C}$. Il existe $M > 0$ tel que pour tout $z \in K$, $Im(z) < M$. Soit $z \in K$ et $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$|g(t, z)| = |f(t)|e^{-\frac{t^2}{2}} e^{tIm(z)} < |f(t)|e^{-\frac{t^2}{2}} e^{tM}$$

qui est également intégrable (on peut le voir de nouveau grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

On conclut alors, par le théorème d'holomorphie, que τ est holomorphe et on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\tau^{(k)}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} (-it)^k e^{itz} dt$$

De plus, comme τ est holomorphe, elle est analytique et donc développable en série entière en 0 de rayon de convergence $d(0, \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}) = \infty$, d'où :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \tau(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tau^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

Or, d'après ce que l'on vient de voir et par hypothèse on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \tau^{(k)}(0) = (-i)^k \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{t^2}{2}} t^k dt = 0$$

On a donc $\tau \equiv 0$ sur $\mathbb{C}$.

Revenons alors à notre remarque sur $\mathbb{R}$. τ est la transformée de Fourier de $\tilde{f}$ et $\tau \equiv 0 \in L^1$. Ainsi par formule d'inversion de la transformée de Fourier dans L^1, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{\tilde{f}}}(t) = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{0}}(t) = 0$$

Or $e^{-\frac{t^2}{2}} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

On a alors le résultat souhaité, d'où $(\frac{h_n}{\|h_n\|})_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.