étude qualitative de $x' = x^2 - t$

(41)

Thm : Soit $(E) : x' = x^2 - t$. si $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, on note $\varphi_{(t_0,x_0)}$ l'unique solution maximale de (E) vérifiant $\varphi_{(t_0,x_0)}(t_0) = x_0$.
alors $\exists ! \, \gamma \in [0;1]$ tel que $\varphi_{(0,\gamma)}$ (soit défini sur $\mathbb{R}_+$ et) vérifie : $\varphi_{(0,\gamma)}(t) = \sqrt{t} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ quand $t \to +\infty$

1) Soit $f : (t,x) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 - t$. f est C^1 et est donc redevable du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Soit $u : t \geqslant 0 \longmapsto \sqrt{t}$ et $v : t \geqslant 0 \longmapsto \sqrt{t+1}$

de sorte que $\forall t \geqslant 0$, $f(t, u(t)) = 0$ et $f(t, v(t)) = 1$

$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0 \\ \forall t > 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \leqslant \frac{1}{2} < f(t, v(t)) \\ \forall t \geqslant 0 \end{cases}$

donc u barrière inférieure stricte sur $\mathbb{R}_+^*$ donc v barrière supérieure stricte sur $\mathbb{R}_+$.

2) le couple $(u \leqslant v)$ est donc un anti-entonnoir sur $\mathbb{R}_+$ et donc : $\forall s \geqslant 0$, $\forall t \in [0; s[\cap I_{(s,\sqrt{s})}$,

$$\sqrt{t} = u(t) < \varphi_{(s,\sqrt{s})}(t) < v(t) = \sqrt{t+1}$$

Par le lemme de sortie de tous compacts, comme lorsque $t \to \inf I_{(s,\sqrt{s})}$, $\varphi_{(s,\sqrt{s})}(t)$ reste bornée, on a nécessairement que $0 \in I_{(s,\sqrt{s})}$ ie $[0; s] \subset I_{(s,\sqrt{s})}$.

- Soit donc $A : s \geqslant 0 \longmapsto \varphi_{(s,\sqrt{s})}(0)$

  ↳ Par l'unicité dans Cauchy-Lipschitz et le fait que u est une barrière inférieure stricte, A est strict. croissante.

  ↳ Par l'existence dans Cauchy-Lipschitz, l'image de A est un intervalle.

On en déduit que A est continue.

- On pose $B : s \geqslant 0 \longmapsto \varphi_{(s,\sqrt{1+s})}(0)$. Comme pour A, on voit que B est strictement décroissante et C^0.

• Si $s \geq 0$, l'unicité de Cauchy-Lipschitz et le fait que $\varphi_{(s,\sqrt{s})}(s) < \varphi_{(s,\sqrt{s+1})}(s)$ montrent que

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi_{(s,\sqrt{s})}(t) < \varphi_{(s,\sqrt{s+1})}(t)$$

en $t=0$: $\quad A(s) < B(s)$.

Ainsi : $\exists\, 0 < \alpha \leq \beta < 1$, $\begin{cases} A(\mathbb{R}_+) = [0;\alpha[\\ B(\mathbb{R}_+) =]\beta;1] \end{cases}$

3) Soit $\gamma \in [\alpha;\beta]$.

$\forall t \in I_{(0,\gamma)}$, $\quad \sqrt{t} = \varphi_{(t,\sqrt{t})}(t) < \varphi_{(0,\gamma)}(t) < \varphi_{(t,\sqrt{t+1})}(t) = \sqrt{t+1}$

par l'unicité dans Cauchy-Lipschitz.

Par le lemme de sortie de tout compact, $\varphi_{(0,\gamma)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall t \geq 0, \quad 0 < \varphi_{(0,\gamma)}(t) - \sqrt{t} < \sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ en $+\infty$

donc $\quad \varphi_{(0,\gamma)}(t) = \sqrt{t} + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ en $+\infty$.

4) Montrons que $\alpha = \beta$. Par l'absurde $\alpha < \beta$.

Soient $\alpha < \gamma_1 < \gamma_2 < \beta$. et $\theta : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \varphi_{(0,\gamma_2)}(t) - \varphi_{(0,\gamma_1)}(t)$

Par l'unicité de Cauchy-Lipschitz, θ ne s'annule pas,

$\theta > 0$ en 0 et donc $\theta > 0$ partout.

$$\theta'(t) = \varphi'_{(0,\gamma_2)}(t) - \varphi'_{(0,\gamma_1)}(t) = \varphi^2_{(0,\gamma_2)}(t) - \varphi^2_{(0,\gamma_1)}(t)$$

$$= \theta(t)\left(\varphi_{(0,\gamma_2)}(t) + \varphi_{(0,\gamma_1)}(t)\right) > 0$$

donc θ croissante

via 3), $\quad \theta(t) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ en $+\infty$ et $\theta(t) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

mais $\theta(0) > 0$. absurde.

Rq : On a unicité sur $\mathbb{R}$ de γ. (Pas dur mais manque de temps et d'envie)

On peut expliquer pourquoi à l'oral. (c'est clair sur le dessin)