

Stone - Weierstrass

Remarques: 201, 203, 209

Référence: [HIR]: Hirsch-Lacombe, Éléments d'Analyse fonctionnelle p. 29

On commence par des rappels: Soit (X, d) un espace métrique compact non vide. $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Définition: Une partie H de $\mathcal{C}(X, K)$ telle que pour tout couple (x, y) de points distincts de X , il existe un $h \in H$ tq $h(x) \neq h(y)$, est dite séparable.

- Définition: Une partie H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ tq $\forall (f, g) \in H^2$, $\sup_{\min} (f, g) \in H$ et $\inf_{\min} (f, g) \in H$, est dite réticulée.

- Remarque: Une seu H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est réticulée $\Leftrightarrow \forall h \in H, |h| \in H$.

En effet, la condition est nécessaire puisque $|h| = \sup(h, 0) - \inf(h, 0)$.

Et elle est suffisante car $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, $\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$.

Lemme: Il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynômiales qui approchent uniformément $|x|$ sur $[-1, 1]$.

Preuve: Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynômiales définie par $P_0 = 0$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$$

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a: $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x| \quad \forall x \in [-1, 1]$:

- $n=0$: $\forall x \in [-1, 1]$, $0 \leq \underbrace{P_0(x)}_{=0} \leq P_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \leq |x|$

$$0 \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$$

- $n \Rightarrow n+1$: Soit $x \in [-1, 1]$, $P_{n+2}(x) - P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x^2 - P_{n+1}^2(x)) \geq 0$

$$|x| - P_{n+2}(x) = |x| - P_{n+1}(x) - \frac{1}{2}(|x| - P_{n+1}(x))(|x| + P_{n+1}(x))$$

$$= \underbrace{(|x| - P_{n+1}(x))}_{\geq 0} \left(1 - \frac{1}{2} \underbrace{(|x| + P_{n+1}(x))}_{\substack{\leq 2|x| \\ \leq 2}} \right) \\ \geq 0$$

D'où la récurrence.

Par la limite monotone $\Rightarrow (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur $[-1, 1]$ telle que pour tout $x \in [-1, 1]$, $0 \leq f(x) \leq |x|$ et $f(x)^2 = x^2$ (à cause de la rel. de récurrence) mais f positive donc $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$.

Comme f est continue sur $[-1, 1]$, la limite simple de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme et comme $[-1, 1]$ est compact, le thm de Dini s'applique et nous donne le résultat souhaité. $\square$

Théorème: (Stone-Weierstrass) Soit H une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparée et unitaire.
Alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Preuve: On élimine d'abord le cas où X a qu'un élément, le résultat étant clair puisque H contient les fonctions constantes (H unitaire).

① Montrons que si $f, g \in H$, alors $\min(f, g) \in H$ et $\max(f, g) \in H$ (i.e. que H est réticulée)

Comme $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f+g + |f-g|)$ et $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f+g - |f-g|)$ et que H est un esp. vect.,
il suffit de vérifier que $\forall h \in H, |h| \in H$. par linéarité de la norme et car H esp. vect.

Soit donc $h \in H$. Si $h=0$ rien à faire, sinon $h \neq 0$ donc $\|h\|_\infty \neq 0$ et on a

$P_n\left(\frac{h}{\|h\|_\infty}\right) \in H$ car H est une algèbre unitaire et que les P_n ont à coefficients réels.

Comme (P_n) cv unif. vers 1.1 sur $[-1, 1]$, la suite de fonctions $\left(P_n\left(\frac{h}{\|h\|_\infty}\right)\right)$ cv unif. vers $\frac{|h|}{\|h\|_\infty} \in H$ sur $[-1, 1]$ d'où $|h| \in H$ (H esp. vect.).

② Montrons que pour $x_1 \neq x_2 \in X$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H$ tq $u(x_1) = \alpha_1$ et $u(x_2) = \alpha_2$:

En effet, H séparée donc $\exists h \in H$ tq $h(x_1) \neq h(x_2)$

Alors le système
$$\begin{cases} \lambda h(x_1) + \mu = \alpha_1 \\ \lambda h(x_2) + \mu = \alpha_2 \end{cases}$$
 est de Cramer

donc admet une (unique) solution $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. En posant $u = \lambda h + \mu$ on a ce qu'il faut.

③ Conclusion: H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$:

Soit $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $v \in H$ tq $\|v - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Soit $x \in X$.

Pour tout $y \neq x$, il existe $u_y \in H$ tq $u_y(x) = f(x)$ et $u_y(y) = f(y)$ (d'après ②)

Soit $O_y = \{x' \in X \text{ tq } u_y(x') > f(x') - \varepsilon\}$, comme u_y et f sont continues c'est un ouvert de X , et il contient x et y par def de u_y .

Donc $X = \bigcup_{y \neq x} O_y \rightarrow$ recouvrement d'ouverts et X compact $\Rightarrow \exists \text{ fin } N^* \text{ tq } X = \bigcup_{j=1}^n O_{y_j} = \bigcup_{j=1}^n \{x' \in X \text{ tq } u_{y_j}(x') > f(x') - \varepsilon\}$

Soit alors $v_x = \max_{i=1, \dots, n} (u_{y_i})$, $v_x \in H$ d'après ① (par réc.).

De plus, $v_x(x) = f(x)$ et $\forall x' \in X$, on a $v_x(x') > f(x') - \varepsilon$.

On fait maintenant varier x et on pose pour tout $x \in X$, $\Omega_x = \{x' \in X \mid v_x(x') < f(x') + \varepsilon\}$.

Ainsi pour tout $x \in X$, Ω_x est un ouvert qui contient x , et donc toujours par compacité de X , on peut choisir un nb fini de pts $x_1, \dots, x_p \in X$ tq $X = \bigcup_{i=1}^p \Omega_{x_i}$.

Soit alors $v = \min(v_{x_1}, \dots, v_{x_p})$. $v \in H$ par ② et $\forall x \in X$, $f(x) - \varepsilon < v < f(x) + \varepsilon$ i.e. $\|f - v\|_\infty \leq \varepsilon$.

compléments au développement:

- on a utilisé le thm de Dini;

Théorème: (Dini) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$, alors elle converge uniformément vers f sur X .

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $\Omega_n = \{x \in X \mid f_n(x) > f(x) - \varepsilon\}$ - souvent car f, f_n continues $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ouverts dont la réunion est X .

X compact $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\Omega_N = X$ et donc $\forall x \in X, f_N(x) > f(x) - \varepsilon$.

Ainsi, $\forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

- On peut déduire d'autres "versions" du thm de Stone-Weierstrass:

- **Théorème:** Si $\mathcal{H}$ est un sev de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ réticulé, séparant et contenant les constantes, alors $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

- **Théorème:** (Stone-Weierstrass, cas complexe) Toute sous-algèbre $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

$\hookrightarrow$ la preuve et pq il faut rajouter "auto-conjuguée" sont très bien expliqués dans [HiK].

- **Corollaire:** (Weierstrass) Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes sur $[a, b]$.

- On peut obtenir même la séparabilité de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ de manière générale où (X, d) compact qd:

- **Théorème:** Soit (X, d) un espace métrique. Alors $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable.

$\rightarrow$ Pas de ref pour ça, on l'a fait en TD avec Gilles...

Preuve: Comme X est compact, X est séparable, soit donc D une partie de X au plus dénombrable.

① Pour $y \in D$, on note $f_y: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, y)$, alors $(f_y)_{y \in D}$ sépare les points de X :

$$\forall x \neq y \in X, d(x, y) > 0$$

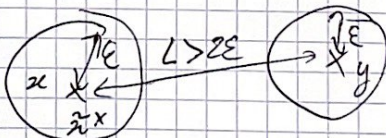
$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } d(x, y) > 2\varepsilon$$

$$\text{or, } \bar{D} = X \text{ donc } \exists \tilde{x} \in D \text{ tq } d(x, \tilde{x}) < \varepsilon$$

$$\text{et alors } f_{\tilde{x}}(x) < \varepsilon$$

$$f_{\tilde{x}}(y) = d(y, \tilde{x}) \geq d(x, y) - d(x, \tilde{x}) > \varepsilon$$

d'où $f_{\tilde{x}}$ sépare x et $y \Rightarrow (f_y)_{y \in D}$ sépare les points de X .



② On veut décrire la séparabilité de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$:

Soit $\Delta = (p_g)_{g \in \mathcal{O}} \cup \{1\}$, Δ dénombrable.

- Soit A l'algèbre engendrée par Δ

Stone-Weierstrass $\Rightarrow \overline{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

Et on a $A = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \int_{i,1}^{d_{i,1}} \dots \int_{i,k_i}^{d_{i,k_i}} \mid n \in \mathbb{N}^*, c_i \in \mathbb{R}, (f_{i,1}, \dots, f_{i,k_i}) \in \Delta^{k_i}, d_{i,1}, \dots, d_{i,k_i} \in \mathbb{N} \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}$

Soit alors $A_{\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \int_{i,1}^{d_{i,1}} \dots \int_{i,k_i}^{d_{i,k_i}} \mid n \in \mathbb{N}^*, c_i \in \mathbb{Q}, (f_{i,1}, \dots, f_{i,k_i}) \in \Delta^{k_i}, d_{i,1}, \dots, d_{i,k_i} \in \mathbb{N} \right\}$

(En fait j'écris que $A_{\mathbb{Q}}$ est la $\mathbb{Q}$ -algèbre engendrée par Δ).

Alors $A_{\mathbb{Q}}$ est dénombrable: $\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ \text{den}}} \bigcup_{\substack{c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Q} \\ \text{den}}} \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{\substack{k_i=1 \\ \text{den}}}^{\infty} \bigcup_{\substack{f_{i,1}, \dots, f_{i,k_i} \in \Delta^{k_i} \\ \text{den}}} \bigcup_{\substack{d_{i,1}, \dots, d_{i,k_i} \in \mathbb{N} \\ \text{den}}} \longrightarrow \text{denombrable}$

Et on $\overline{A_{\mathbb{Q}}} = A$:

Soit $f \in A$, $f = \sum_{i=1}^n c_i \int_{i,1}^{d_{i,1}} \dots \int_{i,k_i}^{d_{i,k_i}}$, soit $\varepsilon > 0$.

Soit $M = \max_{i=1, \dots, n} \left(\left\| \int_{i,1}^{d_{i,1}} \dots \int_{i,k_i}^{d_{i,k_i}} \right\|_{\infty} \right) < +\infty$.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R} \Rightarrow \exists n_1, \dots, n_n \in \mathbb{Q}$ tq $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |n_i - c_i| \leq \frac{\varepsilon}{nM}$

Soit $g = \sum_{i=1}^n n_i \int_{i,1}^{d_{i,1}} \dots \int_{i,k_i}^{d_{i,k_i}}$, alors $\|f - g\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

• D'autres exemples:

- l'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

- Si X est un compact de $\mathbb{C}^d$, $H = \{z \in X \mapsto p(z, \bar{z}) \mid p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d]\}$ est une partie dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.