

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

SOURCE

Garet-Kurtzmann, de l'intégration aux probas

Recapage

- 264 VA discrets
- 266 Indépendance

Trucs à connaître : La formule de Stirling

Énoncé

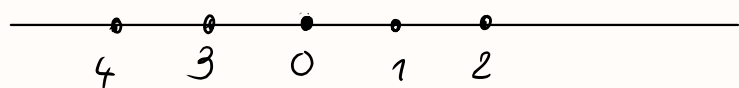
Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ va iid suivant une loi de Rademacher

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 1) = p$$

$$P(X_n = -1) = 1 - p$$

$$\text{Soit } S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

On modélise :



On se balade sur $\mathbb{Z}$

À chaque instant n on lre à pile ou face (pièce pipée)

Pile $\rightarrow$ on avance $(+1)$
Face $\rightarrow$ on recule (-1) } X_n

S_n = position sur $\mathbb{Z}$ à l'instant n

$$S_0 = 0$$

On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n = 0\}}$ nombre de passages en 0

Prop

$$\begin{cases} \bullet S_1: p = \frac{1}{2} & P(S = +\infty) = 1 \\ \bullet S_1: p \neq \frac{1}{2} & P(S = +\infty) = 0 \end{cases}$$

Étapes

① Modélisation, dessin

$$\textcircled{1} \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_k = 0) < +\infty \Rightarrow P(S = +\infty) = 0$$

$$\textcircled{2} \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0) = +\infty \Rightarrow P(S = +\infty) = 1$$

$$\textcircled{3} P(S_{2n} = 0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n}}$$

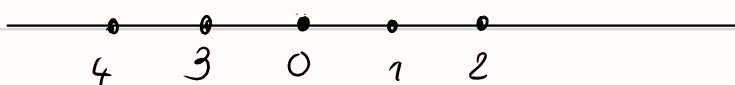
④ Cas symétrique

⑤ Cas non symétrique

① Modélisation du problème

Soyent $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d suivant une loi de Rademacher
 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 1) = p$
 $P(X_n = -1) = 1 - p$

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$

On modélise :  On se balade sur $\mathbb{Z}$

À chaque instant n on lre à pile ou face (pièce pipée)

Pile $\rightarrow$ on avance $(+1)$
 Face $\rightarrow$ on recule (-1) } X_n

$S_n =$ position sur $\mathbb{Z}$ à l'instant n

$S_0 = 0$

On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n = 0\}}$ nombre de passages en 0

① $\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_k = 0) < +\infty \Rightarrow P(S = +\infty) = 0$

Borel - Cantelli

$$\{S = +\infty\} = \left\{ \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} \{S_n = 0\}} \right\} = \left\{ \text{"On repasse en 0 infiniment souvent"} \right\}$$

Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_k = 0) < +\infty \Rightarrow P(S = +\infty) = 0$ par B.C

② $\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0) = +\infty \Rightarrow P(S = +\infty) = 1$

Soit $B = \{S < +\infty\}$ ("On retourne un nombre fini de fois en 0")

Soit T l'instant de dernier retour en 0, de loi :

$$P(T = n) = P(\{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n, S_k \neq 0\}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$P(T = +\infty) = P(S = +\infty)$$

Alors $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{T = n\}$

$$B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n, S_k \neq 0\}$$

$$= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n, S_k - S_n \neq 0\}$$

On $S_k - S_n = \sum_{i=n+1}^k X_i$ et $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$ sont indépendants

Donc en passant aux probas

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0) P(\forall k > n, S_k - S_n \neq 0)$$

On $S_k - S_n = \sum_{i=n+1}^k X_i$ sont la même loi que $S_{k-n} = \sum_{i=1}^{k-n} X_i$

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0) P(\forall k > n, S_{k-n} \neq 0)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0) P(\forall k > 0, S_k \neq 0)$$

$$P(B) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0) \right) P(T = 0)$$

$S_n: P(T = 0) > 0 \quad P(B) = +\infty$ absurde

Donc $P(T = 0) = 0$

Donc $P(B) = 0$

Donc $P(S = +\infty) = 1$

③ $P(S_{2n} = 0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n}}$

$P(S_{2n+1} = 0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

$$= \frac{2n!}{(n!)^2} p^n (1-p)^n$$

Stirling $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\sqrt{\pi n^2} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} p^n (1-p)^n$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n} p^n (1-p)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}$$

④ Cas symétrique

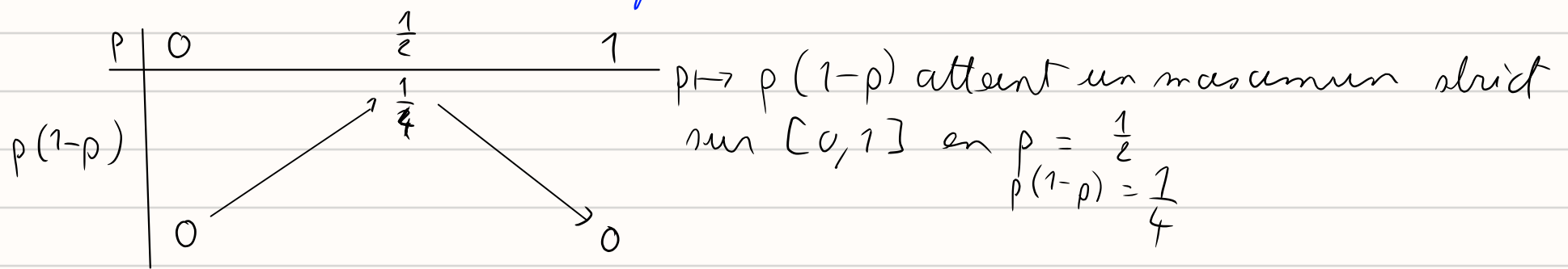
$p = \frac{1}{2}$

$P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ TG série divergente
Série positive

$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(S_n = 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(S_{2n} = 0)$ diverge

Donc $P(S = +\infty) = 1$

④ Cas non symétrique



Supposons $p \neq \frac{1}{2}$
 $p(1-p) < \frac{1}{4}$

$$4p(1-p) < 1$$

Donc la série de terme général $\frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}$ converge

Donc (Somme des équivalents)
 $P(S = +\infty) = 0$