Théorème de Riesz-Fischer

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
- 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Références

[1] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Ellipses, 2020.

Théorème 1. *[1] L'espace* $(\mathrm{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ *est complet pour* $p \in [1, +\infty]$.

Démonstration. Procédons par étapes.

Etape 1 : le cas $p = +\infty$ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans L^∞. Soit $k \geq 1$. Il existe alors $N_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall r, q \geq N_k, \|f_r - f_q\|_\infty \leq \frac{1}{k}.$$

Il existe alors E_k négligeable tel que

$$\forall r, q \geq N_k, \forall x \in \Omega \backslash E_k, |f_r - f_q|(x) \leq \frac{1}{k}.$$

Soit donc $E = \bigcup_{k\geq 1} E_k$. E est négligeable en tant qu'union de négligeable. On a alors

$$\forall x \notin E, \forall k > 0, x \notin E_k.$$

Ainsi, pour tout $x \notin E$, $\forall r, q \geq N_k, |f_r(x) - f_q(x)| \leq \dfrac{1}{k}$. Par complétude de $\mathbb{R}$, on a $f_r \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{C.S.}} f$. Posons $f(x) = 0$ sur E. f est alors mesurable sur Ω. Il reste donc à montrer deux choses.

1. $f \in \mathrm{L}^\infty$.

2. $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} f$.

On en déduira que L^∞ est complet.

1. Pour tout $r, q \geq N_1$, on a $\|f_r - f_q\|_\infty \leq 1$. Soit donc $x \notin E$. Alors
$$\forall r \geq N_1, |f_r(x) - f_{N_1}(x)| \leq 1$$
donc $\forall r \geq N_1, |f_r(x)| \leq |f_{N_1}(x)| + 1 \leq \|f_{N_1}\|_\infty + 1 < +\infty$. En passant à la limite, on a donc
$$\forall x \in \Omega \backslash E, |f(x)| \leq \|f_{N_1}\|_\infty + 1 < +\infty.$$
L'inégalité passe au sup à gauche et on a $\|f\|_\infty \leq \|f_{N_1}\|_\infty + 1 < +\infty$.
2. Par hypothèse, pour tout $k \geq 1$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_k$,
$$\forall q \geq N_k, \forall x \notin E, |f_n(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$
L'inégalité passe donc à la limite quand $q \to +\infty$, x ne dépendant pas de q. On a donc
$$\forall x \notin E, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$$
donc à partir du rang N_k, on a $\|f_n(x) - f(x)\|_\infty \leq \dfrac{1}{k}$. Ainsi,
$$f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} f.$$

Cas $p \in [1, +\infty[$ Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy. On souhaite construire une extraction φ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \leq \frac{1}{2^n}.$$

Une première remarque que si on prend $k \in \mathbb{N}$, alors il existe un entier $\varphi(k)$ tel que $\forall r, q \geq \varphi(k), \|f_r - f_q\|_p \leq \dfrac{1}{2^k}$ ce qui implique que $\forall r \geq \varphi(k), \|f_r - f_{\varphi(k)}\|_p \leq \dfrac{1}{2^k}$.

1. Il existe $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall r \geq \varphi(0), \|f_r - f_{\varphi(0)}\|_p \leq 1$.
2. Il existe $\varphi(1) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall r \geq \varphi(1), \|f_r - f_{\varphi(1)}\|_p \leq \dfrac{1}{2}$. On peut alors supposer que $\varphi(1) \geq \varphi(0)$.
3. On construit ainsi par récurrence $\varphi(k) > \varphi(k-1)$ tel que $\forall r \geq \varphi(k), \|f_r - f_{\varphi(k)}\|_p \leq \dfrac{1}{2^k}$.

Soit $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|$. Par inégalité triangulaire, $\|g_n\|_p \leq 1$ et la suite $(g_n)_n$ est croissante. Par le théorème de Beppo-Levi, $g_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{C.S.}}{\longrightarrow}} g \in \mathrm{L}^p$ sur $\Omega \backslash E$. De plus, pour tout $x \notin E$,
$$\forall q, r \geq 2, |f_{\varphi(r)}(x) - f_{\varphi(q)}| \leq \sum_{k=q}^{r-1} |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)| \leq g(x) - g_{q-1}(x) \leq \varepsilon$$
pour q assez grand. Ainsi, la suite $(f_{\varphi(n)})_n$ est de Cauchy donc convergente par complétude de $\mathbb{R}$. Notons $f(x)$ sa limite. Soit $x \notin E$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $Q \in \mathbb{N}, \forall q \geq Q, |f_{\varphi(q)}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. On en déduit que
$$\forall x \notin E, \forall q, r \geq 2, |f_{\varphi(p)}(x) - f(x)| \leq |f_{\varphi(p)}(x) - f_{\varphi(q)}(x)| + |f_{\varphi(q)}(x) - f(x)| \leq g(x) - g_{q-1}(x) + \varepsilon \leq g(x).$$

Ainsi, $f \in \mathrm{L}^p$ et par le théorème de convergence dominée, $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathrm{L}^p}{\longrightarrow}} f$ puisque

- $|f_n(x) - f(x)|^p \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{C.S.}}{\longrightarrow}} 0$ presque partout.
- $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$ intégrable puisque $g \in \mathrm{L}^p$.

□