leçons : 234 espaces L^p 253 notion de convexité en analyse (202 ex de parties denses) 208 EVN applications linéaires C^0 229 Fonctions monotones - F° convexes.	Automorphismes isométriques des ℓ^p $(p \geq 1,\ p \neq 2, p \neq \infty)$ 10	Référence : Topologie et analyse fonctionnelle (page 80) Stéphane Gonnord et Nicolas Tosel

Théorème : Soit $p \in [1, +\infty[\setminus \{2\}$. Pour toute bijection $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et pour toute suite $\varepsilon : \mathbb{N} \to \{-1,1\}$, on pose $T_{\psi,\varepsilon} : \begin{cases} \ell^p \to \ell^p \\ (u_n) \mapsto (\varepsilon_n u_{\psi(n)}) \end{cases}$. Alors les automorphismes isométriques de ℓ^p sont exactement les $T_{\psi,\varepsilon}$ pour $\psi : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N}$ et $\varepsilon : \mathbb{N} \to \{-1,1\}$.

preuve :

-I- Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective et $\varepsilon : \mathbb{N} \to \{-1,1\}$. Soit $(u_n) \in \ell^p$, on pose $v_n = \varepsilon_n u_{\psi(n)}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n|^p = |\varepsilon_n| \, |u_{\psi(n)}|^p = |u_{\psi(n)}|^p$

La série $\sum |u_n|^p$ converge et les $|u_n|^p$ sont tous positifs donc $\sum |u_{\psi(n)}|^p$ converge et $\sum_{n \geq 0} |u_{\psi(n)}|^p = \sum_{n \geq 0} |u_n|^p$. D'où $(v_n) \in \ell^p$. $T_{\psi,\varepsilon}$ est bien défini et est isométrique. De plus $T_{\psi,\varepsilon}$ est linéaire d'inverse $T_{\psi^{-1},\varepsilon}$ $\square$

Rq : $T_{\psi,\varepsilon}$ est continue et les suites à support fini sont denses dans ℓ^p $(p < +\infty)$ donc si $T : \ell^p \to \ell^p$ est continu, $T = T_{\psi,\varepsilon}$ ssi T et $T_{\psi,\varepsilon}$ coïncident sur les suites à support singleton.

-II- Quelques notations : $\delta^k \in \ell^p$ où $(\delta^k_n) = (\delta_{k,n})$ pour $k \in \mathbb{N}$ fixé

Pour $u \in \ell^p$, on pose $E_u = \{v \in \ell^p \mid \operatorname{supp}(u) \cap \operatorname{supp}(v) = \emptyset\}$

Soit $T : \ell^p \to \ell^p$ un automorphisme isométrique

Lemme clé : $\forall u \in \ell^p \quad T(E_u) = E_{Tu}$

Etape ① : On pose $\theta : \ell^p \times \ell^p \to \mathbb{R}$

$$(u,v) \mapsto \|u+v\|_p^p + \|u-v\|_p^p - 2(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p)$$

$$\tilde{\theta} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(a,b) \mapsto |a+b|^p + |a-b|^p - 2(|a|^p + |b|^p)$$

MQ $\begin{cases} \text{si } p > 2 & \forall a,b \in \mathbb{R} \quad \tilde{\theta}(a,b) \geq 0 \\ \text{si } p < 2 & \forall a,b \in \mathbb{R} \quad \tilde{\theta}(a,b) \leq 0 \\ \forall p \neq 2 & \forall a,b \in \mathbb{R} \quad (\tilde{\theta}(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0) \end{cases}$

Il est clair que $a = 0$ ou $b = 0 \Rightarrow \tilde{\theta}(a,b) = 0$

Supposons que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On pose $u = \frac{a}{b}$ et $\varphi(u) = |1+u|^p + |1-u|^p - 2(1+|u|^p)$

L'étude du signe de $\tilde{\theta}$ se ramène à celle du signe de φ sur $\mathbb{R}^*$

φ est paire donc on ramène l'étude sur $]0,+\infty[$

$\forall u > 0 \quad \varphi\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{|u|^p}\varphi(u)$ donc on étudie sur $[1, +\infty[$

$\forall u \geq 1 \quad \varphi'(u) = 2p\left[\frac{(u+1)^{p-1} + (u-1)^{p-1}}{2} - u^{p-1}\right]$

si $p > 2$, $\varphi'(u) > 0$ par stricte convexité de $u \mapsto u^{p-1}$

si $p < 2$, $\varphi'(u) < 0$ ——— concavité de $u \mapsto u^{p-1}$

$\varphi(1) = 2^p - 4$ donc si $p > 2$ $\varphi(u) > 0$ sur $[1, +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}^*$

si $p < 2$ $\varphi(u) < 0$ sur $[1, +\infty[$ / donc sur $\mathbb{R}^*$

D'où le résultat sur $\tilde{\theta}$.

On en déduit que $\theta(u, v) = 0$ ssi u et v sont à support disjoints

Etape ②: D'où $v \in E_u \Leftrightarrow \theta(u,v) = 0 \overset{T\text{ isométrie}}{\Leftrightarrow} \theta(Tu, Tv) = 0 \Leftrightarrow Tv \in E_{Tu}$

Par surjectivité de T, on obtient $T(E_u) = E_{Tu}$ ■

III - Etude plus précise de $T(E_{\delta^k})$

<u>lemme</u>: Soit $u \in \ell^p \setminus \{0\}$. Alors E_u hyperplan $\Leftrightarrow \exists k \quad u \in \mathrm{vect}(\delta^k)$

E_{δ^k} est donc un hyperplan et $T(E_{\delta^k})$ est également un hyperplan car T automorphisme de ℓ^p. Par le lemme dc: $E_{T\delta^k}$ hyperplan

Par le lemme: $\exists \psi(k) \; T\delta^k = \varepsilon_k \delta^{\psi(k)}$

Ceci définit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

T inversible $\Rightarrow \psi$ inversible

T isométrique $\Rightarrow \forall k \; |\varepsilon_k| = 1$

T coïncide avec $T_{\psi,\varepsilon}$ sur les δ^k pour $k \in \mathbb{N}$

Donc, par continuité, $T = T_{\psi,\varepsilon}$ □