Espace de Bergman du disque unité

Achille Méthivier

Théorème 1. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note $\mathrm{d}z$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ et $H^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω dont le module est de carré intégrable. Alors, $H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Pour $\Omega = \mathbb{D}$ le disque unité ouvert, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$, est une base hilbertienne de $H^2(\mathbb{D})$.

Lemme 2. *Soit $f \in H^2(\Omega)$ et $a \in \Omega$. On note $\rho(a)$ le max des r tel que le disque ouvert $\mathbb{D}(a, r)$, de centre a et de rayon r, soit inclus dans Ω. On a alors*

1.
$$|f(a)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}\rho(a)}||f||.$$

2. *Pour $K \subset \Omega$ compact, on a*
$$||f||_{\infty,K} \le \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\mathrm{dist}(K, {}^c\Omega)}||f||_2.$$

Démonstration. Soit $a \in \Omega$, et $r < \rho(a)$. D'après la formule de la moyenne, on a

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{D}(a,r)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
|f(a)| &\le \frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{D}(a,r)} |f(z)|\,\mathrm{d}z \\
&\le \frac{1}{\pi r^2}\sqrt{\pi}r\left(\int_{\mathbb{D}(a,r)} |f(z)|^2\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{\pi}r}||f||_2.
\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité voulue en passant à la limite quand $r \to \rho(a)$.
Maintenant, soit $K \subset \Omega$. Comme K compact, on a $\mathrm{dist}(K, {}^c\Omega) > 0$ et pour $a \in K$, $\rho(a) \ge \mathrm{dist}(K, {}^c\Omega)$. Donc,

$$|f(a)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\mathrm{dist}(K, {}^c\Omega)}||f||_2,$$

et on peut passer au sup sur K pour obtenir l'inégalité souhaitée. □

Démonstration du théorème. On souhaite montrer que $H^2(\Omega)$ est complet pour la norme $||\cdot||$, issue du produit scalaire. Comme $L^2(\Omega)$ est complet, montrons que $H^2(\Omega)$ est fermé dans $L^2(\Omega)$. Soit $f \in \overline{H^2(\Omega)}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $||f - f_n||_2 \to 0$. D'après l'inégalité démontrée dans le lemme, pour K compact de Ω, $(f_n)_{|K}$ converge uniformément vers $f_{|K}$. Comme les f_n sont holomorphes, le théorème de Weierstrass donne que f est holomorphe, ce qu'il fallait démontrer.
Vérifions dans un premier temps que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée. En passant en coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m\rangle &= \frac{\sqrt{(m+1)(n+1)}}{\pi}\int_{|z|<1} \overline{z^m}z^n\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\sqrt{(m+1)(n+1)}}{\pi}\int_0^1 \rho^{n+m+1}\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \delta_{nm}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que la famille est totale, pour cela considérons $f \in (\mathrm{Vect}\{(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\})^\perp$ et montrons que $f = 0$. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 = \langle f, e_n\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_{\mathbb{D}} f(z)\bar{z}^n\,\mathrm{d}z.$$

Par convergence dominée, on a

$$\int_{\mathbb{D}} f(z)\bar{z}^n\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to 1}\int_{|z|<r} f(z)\bar{z}^n\,\mathrm{d}z.$$

Or, sur le disque de centre 0 de rayon $r < 1$, on a convergence normal de série de fonction $z \mapsto \sum a_k z^k$ vers f. On peut donc intervertir somme et intégrale pour obtenir, et le même calcul que précédemment donne

$$\int_{|z|<r} f(z)\bar{z}^n\,\mathrm{d}z = \sum_{k\ge 0} a_k\int_{|z|<r} z^k\bar{z}^n\,\mathrm{d}z = a_n\frac{r^{2n+2}}{2n+2}.$$

En faisant $r \to 1$, on obtient que $a_n = 0$ et donc $f = 0$.
□