leçons :
104 : Groupes finis ...
105 : Groupe des permutations
108 : Parties génératrices d'un groupe
162 : Systèmes linéaires.

Théorème de Brauer sur les matrices de permutation

42

Références :
FGN alg. 2 pour la fin (Smith)
ou Gourdon "Algèbre" p. 154

Thm: Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma, \tau \in S_n$.
Alors σ et τ sont conjuguées ssi P_σ et P_τ sont $\mathbb{K}$-semblables.

Notations et prérequis: Pour $\gamma \in S_n$, on note $P_\gamma \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice $\left(\delta_{\gamma(i),j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$.

$\begin{cases} S_n \to GL_n(\mathbb{K}) \\ \gamma \mapsto P_\gamma \end{cases}$ est un morphisme de groupes. $P_\sigma \cdot e_i = e_{\sigma^{-1}(i)}$

<u>preuve:</u> (de la réciproque)

① <u>lemme:</u> Pour $\gamma \in S_n$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note $c_p(\gamma)$ le nombre de p-cycles dans la décomposition de γ en cycles à supports disjoints. Alors, si $\sigma, \tau \in S_n$, σ et τ sont conjuguées ssi $\forall p \geq 1 \quad c_p(\sigma) = c_p(\tau)$.

<u>preuve du lemme:</u> Soit $c = (a_1 - a_p) \in S_n$ un p-cycle et $\gamma \in S_n$.
On a $\gamma c \gamma^{-1} = (\gamma(a_1) - \gamma(a_p))$. Le résultat tombe immédiatement.

Pour montrer que $\forall p \geq 1 \quad c_p(\sigma) = c_p(\tau)$, on va montrer que le vecteur $x = \begin{pmatrix} c_1(\sigma) - c_1(\tau) \\ c_2(\sigma) - c_2(\tau) \\ \vdots \\ c_n(\sigma) - c_n(\tau) \end{pmatrix}$ vérifie un système linéaire $Bx = 0$ avec B inversible.

② <u>Soient $\sigma, \tau \in S_n$ tels que P_σ et P_τ sont $\mathbb{K}$-semblables.</u>

- On note, pour $\gamma \in S_n$, $V^\gamma = \operatorname{Ker}(P_\gamma - id)$. Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$.
$v \in V^\gamma \Leftrightarrow P_\gamma v = v \Leftrightarrow (v_{\gamma(1)}, \dots, v_{\gamma(n)}) = (v_1, \dots, v_n) \Leftrightarrow \Big\{ \forall\, i,j \in [\![1,n]\!] \quad v_i = v_j$ dès lors que i et j sont dans la même orbite de l'action de $\langle\gamma\rangle$ sur $[\![1,n]\!]$

On en déduit que $\dim V^\gamma =$ nombre d'orbites de l'action de $\langle\gamma\rangle$ sur $[\![1,n]\!]$
$=$ nombre de cycles dans la décomposition de γ en cycles à supports disjoints (on compte aussi les cycles de longueur 1)

- P_σ et P_τ $\mathbb{K}$-semblables $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P_\sigma^k = P_{\sigma^k}$ et $P_\tau^k = P_{\tau^k}$ sont $\mathbb{K}$-semblables
$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \dim V^{\sigma^k} = \dim V^{\tau^k}$

③ <u>lemme:</u> Soit $c = (a_1 - a_p) \in S_n$ un p-cycle et $k \in \mathbb{N}^*$
Alors c^k est un produit de $k \wedge p$ cycles de longueur $\frac{p}{k \wedge p}$ (on ne compte pas les 1-cycles (j) pour $j \notin \{a_1, \dots, a_p\}$)

<u>preuve du lemme:</u>
L'orbite de a_i sous l'action de $\langle c^k\rangle$ sur $[\![1,n]\!]$ est $\omega(a_i) = \{ a_{i+nk\,(p)} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
On cherche le plus petit $n \neq 0$ tel que $0 = nk\ (p)$.
$p \mid nk \Leftrightarrow \frac{p}{p\wedge k} \mid n \frac{k}{p \wedge k} \overset{\text{(Gauss)}}{\Leftrightarrow} \frac{p}{p\wedge k} \mid n$. D'où $\forall i \in [\![1,p]\!] \quad |\omega(a_i)| = \frac{p}{p \wedge k}$
La réunion de ces orbites est de cardinal p donc il y en a $k \wedge p$.

④ Fin de la preuve :

- D'après ② et ③, on a $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^{n} c_p(\sigma)\, k \wedge p = \sum_{p=1}^{n} c_p(\tau)\, k \wedge p$

On pose $B = (i \wedge j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et on obtient le système linéaire voulu : $Bx = 0$.

Il reste à montrer que B est inversible.

- $\forall i,j \geq 1 \quad i \wedge j = \sum_{d \mid i \wedge j} \varphi(d) = \sum_{\substack{d \mid i \\ \text{et } d \mid j}} \varphi(d)$

On pose $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ où $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \mid j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On vérifie (par le calcul !) que ${}^tA \operatorname{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))\, A = B$

Or $A = \begin{pmatrix} 1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K})$

et $\operatorname{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n)) \in GL_n(\mathbb{K})$ car $\operatorname{car}(\mathbb{K}) = 0$

D'où B inversible $\square$

Complément (vérification de la formule ${}^tA \operatorname{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))\, A = B$) :

$$\operatorname{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))\, A = \left(\varphi(i)\, a_{ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$${}^tA \operatorname{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))\, A = \left(\sum_{d=1}^{n} a_{di}\, \varphi(d)\, a_{dj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$= \left(\sum_{\substack{d \mid i \\ \text{et } d \mid j}} \varphi(d) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$