3.6 La loi zêta, ou comment utiliser les probabilités pour prouver des résultats annexes (notamment sur la fonction ζ) (121, 244, 264, 266) [27] [17] [31]

Dans ce développement, on montre que la fonction ζ admet un développement en produit Eulérien avec des outils de probabilités ! On fait alors le lien entre nombres premiers, fonction spéciale et probabilités avec ce théorème !

Théorème 3.23 (Développement eulérien de la fonction ζ)**.** Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $s \in (1, +\infty)$, on a :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Démonstration. **Étape 1 : Introduction de la loi zêta**

Pour $s > 1$, on définit la loi zêta de paramètre s comme l'unique mesure de probabilité $\mathbb{P}_s$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}.$$

Cela définit bien une mesure de probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N})^*)$ étant donné que, étant donné que $s > 1$, la série $\sum \mathbb{P}_s(\{n\})$ converge et est de somme $\zeta(s)$.

Étape 2 : les événements $(p\mathbb{N}^*)_{p \in \mathscr{P}}$ sont mutuellement indépendants

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}_s(k\mathbb{N}^*) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}_s(\{kj\}) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s) k^s j^s} = \frac{1}{k^s}.$$

Prenons maintenant $p_1, \ldots, p_n$ n nombres premiers distincts. On a :

$$\bigcap_{i=1}^{n} (p_i \mathbb{N}^*) = \{m \in \mathbb{N}^* \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i \mid m\} = \left\{ m \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \prod_{i=1}^{n} p_i \mid m \right\} = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) \mathbb{N}^*$$

étant donné que les p_i sont des nombres premiers tous distincts (on a donc, en particulier qu'ils sont premiers entre eux, d'où la deuxième égalité ensembliste). On a donc :

$$\mathbb{P}_s\left(\bigcap_{i=1}^{n} (p_i \mathbb{N}^*)\right) = \mathbb{P}_s\left(\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) \mathbb{N}^*\right) = \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^s} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_s(p_i \mathbb{N}^*).$$

Étape 3 : Convergence du produit

Rangeons les nombres premiers dans l'ordre croissant et notons-les $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Le produit du théorème converge donc si et seulement si la série :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$$

converge. Or, étant donné que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n > n$, on a :

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_n^s} < \frac{1}{n^s},$$

de sorte que, étant donné que $s > 1$, $\sum \frac{1}{n^s}$ converge. Ainsi, du fait de la comparaison :

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^s}\right)$$

on a, étant donné que les suites en jeu sont positives, que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\ln\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)$ converge. Ainsi, le produit

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)^{-1}$$

converge.

Étape 4 : Conclusion

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n suivant :

$$A_n = \bigcap_{k=1}^{n} \left(\mathbb{N}^* \setminus (p_k\mathbb{N}^*)\right).$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme une suite décroissante d'événements. Ainsi, on a :

$$\mathbb{P}_s\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_s\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1-\mathbb{P}_s\left(p_k\mathbb{N}^*\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1-\mathbb{P}_s\left(p_k\mathbb{N}^*\right)\right) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right).$$

Or, on a :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbb{N}^* \setminus (p_n\mathbb{N}^*)\right) = \{1\}$$

étant donné que 1 est l'unique entier strictement positif divisible par aucun nombre premier. Ainsi, on conclut :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right) = \mathbb{P}_s(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)},$$

ce qui est la formule attendue ! □

Un corollaire à ce résultat est le suivant :

Corollaire 3.24 (Divergence de la série des inverses des nombres premiers)**.** On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty.$$

Démonstration. **Étape 1 : Équivalent de ζ en 1**

On effectue une classique comparaison série-intégrale :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall s > 1, \quad \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} \leqslant \frac{1}{n^s} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.$$

Ainsi, on a, en sommant ces termes :

$$\forall s > 1, \quad \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} \leqslant \zeta(s) - 1 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$$

i.e.

$$\frac{1}{(s-1)2^{s-1}} \leqslant \zeta(s) - 1 \leqslant \frac{1}{s-1}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\zeta(s) \underset{s\to1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}.$$

Étape 2 : conclusion
Étant donné que :

$$-\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_n}$$

et que les suites en jeu sont positives, on a que $\sum \frac{1}{p_n}$ converge si et seulement si $\sum -\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ converge. Ainsi, la série $\sum \frac{1}{p_n}$ si et seulement si le produit :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

converge. Notons ℓ la valeur de ce produit. Étant donné que, pour tout $s>1$, on a l'inégalité :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0<\frac{1}{p_n^s}\leqslant\frac{1}{p_n},$$

on a :

$$\forall s>1,\quad \zeta(s)=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)^{-1}\leqslant\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}=\ell,$$

or, on rappelle :

$$\zeta(s)\xrightarrow[s\to1^+]{}+\infty\,!\quad \textbf{ABSURDE!}$$

Ainsi, la série $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge. $\square$

Remarque 3.6.1 (Vers le théorème de la progression arithmétique)**.** *On a des développements eulériens similaires pour ce qui s'appelle les fonctions L de Dirichlet :*

Définition 3.25. Soit $m\in\mathbb{N}^*$

1. On appelle *caractère de Dirichlet modulo m* tout élément $\chi\in\widehat{U_m}$, où U_m désigne le groupe multiplicatif $\left(\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}\right)^\times$ et, si G est un groupe, $\widehat{G}$ désigne les morphismes de G dans $\mathbb{C}^*$.
2. Si χ est un caractère de Dirichlet modulo m, alors, on appelle *série L de Dirichlet* associé à χ la fonction définie par :

$$\forall s\in(1,+\infty),\quad L(\chi,s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

où χ a été prolongée sur $\mathbb{N}^*$ ainsi :

$$\chi(n)=\begin{cases}\chi(\overline{n}) & \text{si } n\wedge m=1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.26. Soient $m\in\mathbb{N}^*$ et χ un caractère de Dirichlet modulo m. On a alors que la série L associée à χ vérifie :

$$\forall s\in(1,+\infty),\quad L(\chi,s)=\prod_{p\in\mathscr{P}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Idée de preuve. On peut en fait également prouver le développement eulérien de ζ avec l'argument que je vais développer. Premièrement, étant donné que χ est un caractère de Dirichlet modulo m, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \chi(n)\in\mu_{\varphi(m)}(\mathbb{C}),$$

et donc ce sont des nombres de module 1, ce qui justifie la convergence du produit (et également la convergence de la série L). De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\chi(p_k)}{p_k^s}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\chi(p_k)^j}{p_k^{js}} \right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\chi\left(p_k^j\right)}{p_k^{js}} \right) = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \frac{\chi\left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{j_k}\right)}{\left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{j_k}\right)^s}$$

et on a qu'en faisant tendre n vers $+\infty$, on va récupérer tous les entiers dans la somme, sans en compter deux fois par unicité de la décomposition en produits de facteurs premiers, et donc :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\chi(p_n)}{p_n^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = L(\chi, s).$$

□

À partir de là, on peut définir, pour $\overline{a} \in U_m$ et $s > 1$ la fonction suivante :

$$\omega(s, \overline{a}) = \sum_{p \in \mathscr{P}} \left(\sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ p^k \in \overline{a}}} \frac{1}{kp^{ks}} \right).$$

En découpant cette somme selon si $k = 1$ ou non, on voit que s'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p congrus à a modulo m (i.e. $p \in \overline{a}$), alors $\omega(s, \overline{a})$ a une limite quand $s \to 1^+$. Ainsi, il suffit de montrer que $\omega(\cdot, \overline{a})$ diverge en 1 pour obtenir le résultat. Un théorème d'analyse de Fourier sur les groupes finis montre qu'on a la formule suivante :

$$\forall s > 1,\ \forall \overline{a} \in U_m, \quad \omega(s, \overline{a}) = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi \in \widehat{U_m}} \overline{\chi(\overline{a})} \log\left(L(\chi, s)\right).$$

On montre ensuite (c'est très dur !! ce résultat utilise une formule générale sur les résidus des séries L en 1) que si χ n'est pas le morphisme trivial, $L(\chi, \cdot)$ est continue en 1. Si χ est le caractère trivial, en revanche, du fait du développement en prouit eulérien, on a :

$$\forall s > 1, \quad L(\chi, s) = \zeta(s) \prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \mid m}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

qui diverge en $s = 1$. On en conclut donc le théorème de la progression arithmétique !