

1.9 Inégalité de Heisenberg (201, 209, 234, 250)

Une autre application de l'analyse de Fourier en physique (ici, en physique quantique) est l'inégalité de Heisenberg : elle stipule qu'une fonction f ne peut être à la fois localisée en espace (c'est-à-dire avoir une variance spatiale faible) et en fréquence. En physique quantique, cela se traduit par le fait que si une particule quantique a un comportement régi par une fonction d'onde Ψ , alors la variance selon $|\Psi|^2$ de la position de cette particule multiplié par la variance de l'impulsion (ou quantité de mouvement) de cette particule est minorée par $\frac{\hbar^2}{4}$. Ainsi, on ne peut pas connaître avec précision à la fois la position de la particule et sa quantité de mouvement !

Théorème 1.19 (Inégalité de Heisenberg). Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors f vérifie l'inégalité :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{\pi}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2.$$

Démonstration. **Étape 1 : La preuve pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$**

On commence par montrer l'inégalité pour f dans la classe de Schwartz, et on l'étendra par densité (on verra comment). Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors, on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad i\xi \hat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi).$$

Ainsi, par la formule de Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f'}\|_2^2 = 2\pi \|f'\|_2^2.$$

Ainsi :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) = 2\pi \|xf\|_2^2 \|f'\|_2^2 \geq 2\pi \left| \int_{\mathbb{R}} xf(x) \overline{f'(x)} dx \right|^2$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz. Or, par intégration par parties, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x) \overline{f'(x)} dx = \underbrace{\left[x|f(x)|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} (f(x) + xf'(x)) \overline{f(x)} dx.$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} xf(x) \overline{f'(x)} dx \right) = -\frac{1}{2} \|f\|_2^2.$$

Au final, on obtient :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq 2\pi \left| \int_{\mathbb{R}} xf(x) \overline{f'(x)} dx \right|^2 \geq 2\pi \times \frac{1}{4} \|f\|_2^4 = \frac{\pi}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2.$$

Étape 2 : Extension par densité

Pour prouver le cas général, il suffit de le prouver pour toute fonction f dans l'espace fonctionnel suivant :

$$H_1^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid xf \in L^2(\mathbb{R}), \xi \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

qui est un espace de Sobolev modifié pour être stable par transformée de Fourier. En effet, si $f \notin H_1^1(\mathbb{R})$, l'inégalité est trivialement vérifiée. On va donc chercher à approcher les fonctions de $H_1^1(\mathbb{R})$ par des fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme adaptée à cet espace :

$$\|f\|_{H_1^1}^2 := \|f\|_2^2 + \|xf\|_2^2 + \|\xi \hat{f}\|_2^2.$$

Remarquez d'ailleurs que $H_1^1(\mathbb{R})$ muni de cet norme est un espace de Hilbert !

Sous-étape 1 : Approximation par des fonctions à support compact

On va d'abord chercher à approcher une fonction $f \in H_1^1(\mathbb{R})$ par une fonction de $H_1^1(\mathbb{R})$ à support compact. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

- $\chi(0) = 1$,
- $0 \leq \chi \leq 1$,
- $\text{supp}(\chi) \subset [-1, 1]$ (pour fixer les idées).

Sachez prouver qu'une telle fonction existe ! La plus simple est la suivante :

$$\begin{aligned} \chi &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{x}{1-x^2}} & \text{si } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Posons maintenant la suite de fonctions $\chi_n = \chi\left(\frac{\cdot}{n}\right)$. Alors, pour toute fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\|g\chi_n - g\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

par convergence dominée, étant donné que $\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.p.}} 1$. Ainsi, en particulier, $f\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} f$ et

$xf\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} xf$. On a alors un candidat solide pour approcher f en norme $\|\cdot\|_{H_1^1}$. Notons alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n := f\chi_n$. On a bien que $f_n \in H_1^1(\mathbb{R})$ et que f_n est à support compact. Il ne reste plus qu'à montrer que $\widehat{\xi f_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} \widehat{\xi f}$. On a, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{\xi f_n}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \xi \left(\widehat{f * \chi_n} \right)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi \widehat{f}(\xi - \zeta) \widehat{\chi_n}(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} (\xi - \zeta) \widehat{f}(\xi - \zeta) \widehat{\chi_n}(\zeta) d\zeta + \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi - \zeta) \zeta \widehat{\chi_n}(\zeta) d\zeta \right).$$

On reconnaît, dans le premier terme, la fonction $(\zeta \widehat{f}) * \widehat{\chi_n}$. Puisque $\zeta \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{g}(\zeta) = \zeta \widehat{f}(\zeta)$ pour presque tout $\zeta \in \mathbb{R}$, de sorte que :

$$(\zeta \widehat{f}) * \widehat{\chi_n} = \widehat{g * \chi_n} = 2\pi \widehat{g\chi_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} 2\pi \widehat{g} = 2\pi \zeta \widehat{f}$$

par continuité de la transformée de Fourier sur L^2 (ou Plancherel, c'est pareil), étant donné que $g\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} g$. Maintenant, montrons que le deuxième terme tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. En effet, on reconnaît la fonction $\widehat{f * (\zeta \chi_n)} = -i \widehat{f} * \widehat{\chi'_n} = -2i\pi \widehat{f\chi'_n}$. Or, par hypothèse, on a :

$$\chi'_n = \frac{1}{n} \chi' \left(\frac{x}{n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS}} 0 \quad \text{et donc} \quad f\chi'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.p.}} 0.$$

De plus, $f\chi'_n$ est dominée indépendamment de n par $f\|\chi'\|_\infty \in L^2(\mathbb{R})$. Ainsi, par convergence dominée :

$$f\chi'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} 0 \quad \text{et donc} \quad \widehat{f * (\zeta \chi_n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} 0.$$

En définitive, on obtient bien que $\widehat{\xi f_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} \widehat{\xi f}$, et donc $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_1^1} f$, ce qui conclut cette sous-étape !

Sous-étape 2 : Approximation des fonctions à support compact par des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$

Prenons donc maintenant $f \in H_1^1(\mathbb{R})$ à support compact, inclus dans $[-R+1, R-1]$ disons, et prenons un noyau régularisant $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construit ainsi : soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant :

- $\varphi \geq 0$,

- $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$,
- $\text{supp}(\varphi) \subset [-1, 1]$ (pour fixer les idées).

On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$. On a donc que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité, et que pour toute fonction $g \in L^p(\mathbb{R})$, $g * \varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. En notant alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n := f * \varphi_n$, on a :

- $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{supp}(f_n) \subset [-R + 1 - \frac{1}{n}, R - 1 + \frac{1}{n}] \subset [-R, R]$,
- $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} f$.

Montrons maintenant que $xf_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} xf$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-R}^R x^2 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq R^2 \|f_n - f\|_2^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

La première égalité est vérifiée car $[-R, R]$ contient à la fois le support de f_n et celui de f . Il ne reste plus qu'à vérifier que $\widehat{\xi f_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} \xi \hat{f}$. On remarque que, étant donné que $f_n = f * \varphi_n$, que $\widehat{f_n} = \hat{f} \widehat{\varphi_n}$. Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left| \widehat{f_n}(\xi) - \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 |\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1|^2 d\xi.$$

Étant donné que $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi_n}(\xi) = \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi = 1,$$

car $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, et donc $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, en particulier $\hat{\varphi}$ est continue. Ainsi, l'intégrande de :

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 |\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1|^2 d\xi,$$

tend vers 0 presque partout. Enfin, par inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\xi^2 \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 |\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1|^2 \leq \xi^2 \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 (1 + \|\hat{\varphi}\|_\infty) \leq \xi^2 \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 (1 + \|\varphi\|_1) = 2\xi^2 \left| \hat{f}(\xi) \right|^2$$

car φ est positive et donc :

$$\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \varphi = 1.$$

Étant donné que $\xi \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, le théorème de convergence dominée peut s'appliquer, et on obtient donc :

$$\widehat{\xi f_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \xi \hat{f},$$

ce qui termine de montrer que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_1^1} f$!

Étape 3 : Conclusion

L'étape précédente a permis de montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ était dense dans $(H_1^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{H_1^1})$. Ainsi, si $f \in H_1^1(\mathbb{R})$, il existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ approchant f en norme H_1^1 . Or, d'après la première étape :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|xf_n\|_2^2 \times \left\| \widehat{\xi f_n} \right\|_2^2 \geq \frac{\pi}{2} \|f_n\|_2^4.$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant le fait que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{H_1^1} f$, on obtient :

$$\|xf\|_2^2 \times \|\xi\hat{f}\|_2^2 \geq \frac{\pi}{2} \|f\|_2^4,$$

ce qui conclut la preuve! □

Remarque 1.9.1 (L'inégalité est-elle optimale? Si oui y a-t-il moyen de caractériser le cas d'égalité?). *On peut caractériser le cas d'égalité de l'inégalité de Heisenberg pour les fonctions de la classe de Schwartz, qui revient à avoir égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz du début. On a égalité si et seulement s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lambda x f(x).$$

Ainsi, il y a égalité dans l'inégalité de Heisenberg si et seulement si f est une gaussienne :

$$f(x) = Ce^{-\lambda x^2}$$

avec $\lambda > 0$. Vérifions pour la gaussienne centrée réduite :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{g}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Ainsi :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xg(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx = \underbrace{\left[-\frac{x}{2} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'où :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xg(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right) = \frac{1}{8}.$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \times \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Ainsi :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \right)^2 = \frac{1}{4\pi}.$$

On reconnaît donc :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xg(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right) = \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4\pi} = \frac{\pi}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \right)^2 !$$