Lemme de Schwarz & Biholomorphismes du disque unité

Jérémie Klingler – Université Lyon 1

Recasages : 245, 219 (en mettant l'accent sur l'utilisation du principe du maximum)

Référence : *Analyse complexe*, Amar & Mathéon (page 156 pour le lemme de Schwarz, page 304 pour l'application)

Notons $D := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$.

Lemme de Schwarz. Soit $f : D \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$. Alors :

i) $\forall z \in D$, $|f(z)| \leq |z|$.

ii) S'il existe $a \in D \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = |a|$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{U}$ tel que pour tout $z \in D$, $f(z) = \lambda z$.

Application. Les biholomorphismes de D sont les $\varphi_{a,\lambda} : z \mapsto \lambda \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$, où $\lambda \in \mathbf{U}$ et $a \in D$.

Démonstration du lemme de Schwarz. *i)* Soit f une telle fonction. Comme elle est holomorphe et s'annule en 0, on en déduit qu'il existe $g : D \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que pour tout $z \in D$, $f(z) = zg(z)$.
Soit $0 < r < 1$ et $z \in D$ tel que $|z| = r$. Alors $|g(z)| = |f(z)|/|z| \leq 1/r$.
Ainsi, $|g|$ est bornée par $1/r$ sur $C(0, r)$ donc d'après le principe du maximum, elle est bornée par $1/r$ sur $D(0, r)$.
Soit $z \in D$. On a donc pour tout $r > |z|$, $|g(z)| \leq 1/r$, puis, en faisant tendre r vers 1, on en déduit que $|g(z)| \leq 1$. Ainsi, pour tout $z \in D$, $|f(z)| \leq |z|$.

ii) Soit $a \neq 0$ tel que $|f(a)| = |a|$. Alors $|g(a)| = 1$, ce qui assure que $|g|$ atteint sa borne supérieure à l'intérieur de D. Le principe du maximum assure alors que g est constante. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $g \equiv \lambda$. Or $|g(a)| = 1 = |\lambda|$, d'où $\lambda \in \mathbf{U}$.
Ainsi, pour tout $z \in D$, $f(z) = \lambda z$.

Démonstration de l'application. Soient $a \in D$ et $\lambda \in \mathbf{U}$. Posons $\varphi_a : z \in D \mapsto \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$.

φ_a est bien définie et à valeurs dans D. En effet, pour $z \in D$, $\overline{a}z = 1 \iff z = 1/\overline{a}$. Or $|1/\overline{a}| = 1/|a| > 1$ donc comme $|z| < 1$, on en déduit que $z \neq 1/\overline{a}$ et donc $\overline{a}z \neq 1$.
En outre, on a

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{a-z}{1-\overline{a}z} \right|^2 &= \frac{|1-\overline{a}z|^2 - |a-z|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{1 + |a|^2|z|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{a}z) - |z|^2 - |a|^2 + 2\mathrm{Re}(\overline{a}z)}{|1-\overline{a}z|^2} \\ &= \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi_a(z) \in D$.

De plus, on a $\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{Id}$ et φ_a est holomorphe sur D.
Enfin, notons $r_\lambda : z \in D \mapsto \lambda z$. C'est bien une bijection de D dans D holomorphe et l'on a $(r_\lambda)^{-1} = r_{\overline{\lambda}}$.
Ainsi, $\varphi_{a,\lambda} = r_\lambda \circ \varphi_a$ est une bijection holomorphe de D dans D et l'on a $\varphi_{a,\lambda}^{-1} = \varphi_a \circ r_{\overline{\lambda}}$ qui est également holomorphe.

Réciproquement, considérons $\psi : D \to D$ une bijection biholomorphe. Notons $a := \psi^{-1}(0)$ et $f := \psi \circ \varphi_a$.
f est holomorphe et à valeurs dans D. En outre, $f(0) = \psi(a) = 0$. Le lemme de Schwarz assure alors que pour tout $z \in D$, $|f(z)| \leq |z|$.
De plus, $f^{-1} = \varphi_a \circ \psi^{-1}$ est également holomorphe à valeurs dans D et $f^{-1}(0) = \varphi_a(a) = 0$. Le lemme de Schwarz assure alors que pour tout $z \in D$, $|f^{-1}(z)| \leq |z|$. De ce fait, on a pour $z \in D$: $|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \leq |z|$.
Ainsi, la deuxième partie du lemme de Schwarz assure l'existence d'un $\lambda \in \mathbf{U}$ tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.
On en déduit alors que pour $z \in D$, $\psi(z) = f(\varphi_a^{-1}(z)) = f(\varphi_a(z)) = \lambda\varphi_a(z) = \varphi_{a,\lambda}(z)$.

En conclusion, l'ensemble des biholomorphismes du disque unité complexe est

$$\left\{\varphi_{a,\lambda} : z \mapsto \lambda\frac{a-z}{1-\bar{a}z} \ : \ (a,\lambda) \in D \times \mathbf{U}\right\}.$$

Remarques.

- ⋆ Dans la référence, les auteurs parlent d'*automorphismes* du disque unité. Il faut prendre garde au fait qu'ici, le mot automorphisme désigne une bijection d'un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ dans lui-même, holomorphe dans les deux sens. Il ne faut pas confondre cette définition avec la définition algébrique habituelle, au risque de faire une grosse erreur devant le jury. Je préfère donc utiliser ici le terme de biholomorphisme pour éviter toute confusion.
- ⋆ Attention, le passage à la limite quand $r \to 1$ (cf la question ci-dessous) est fait rapidement dans la référence et mérite d'être d'avantage détaillé, ou du moins d'être bien maîtrisé pour pouvoir l'expliquer lors des questions.

Questions posées.

- ⋆ Comment se justifie le passage à la limite quand $r \to 1$ au début de la démonstration du lemme de Schwarz ? (je l'avais moins détaillé en passant au tableau)
- ⋆ Pourquoi existe-t-il g holomorphe telle que $\forall z \in D$, $f(z) = zg(z)$?
- ⋆ Pourquoi a-t-on $\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{Id}$?

Exercices liés à ce développement.

1. Déterminer les biholomorphismes de D^*.

Solution. Soit f un biholomorphisme de D^*. Soit $z \in D^*$. Comme f est à valeurs dans D^*, on a $|zf(z)| \leq |z| \xrightarrow[z\to 0]{} 0$.
Ainsi, 0 est une singularité effaçable de f et l'on peut prolonger holomorphiquement f en 0. De même, f^{-1} se prolonge holomorphiquement en 0 par $f^{-1}(0) = b$. Si $b \neq 0$, alors f s'annule en b, ce qui est absurde car $f(D^*) \subset D^*$. Ainsi, le seul prolongement possible pour f^{-1} en 0 est $f^{-1}(0) = 0$. De ce fait, le seul prolongement biholomorphe possible de f en 0 est $f(0) = 0$.
Ainsi, le prolongement de f obtenu est un biholomorphisme de D s'annulant en 0. Il existe donc $a \in D$ et $\lambda \in \mathbf{U}$ tels que $f = \varphi_{a,\lambda}$. Or $0 = f(0) = \varphi_{a,\lambda}(0) = \lambda a$. Ainsi, on en déduit que $a = 0$ ou $\lambda = 0$ et donc que $f = \lambda\,\mathrm{Id}$.
En somme, les automorphismes de D^* sont les homothéties de rapport $\lambda \in \mathbf{U}$. □

2. Déterminer les biholomorphismes du demi-plan supérieur $H := \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Solution. L'idée est de se ramener aux biholomorphismes de D. Pour ce faire, on cherche un biholomorphisme entre D et H.
Considérons $\varphi : z \in D \mapsto \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \frac{z+1}{z-1}$.
φ est bien définie car pour $z \in D$, $z \neq 1$.
En outre, pour $z \in D$, on a

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)(\overline{z}-1)}{(z-1)(\overline{z}-1)} = \frac{|z|^2 - 1 - 2\mathrm{i}\mathrm{Im} z}{|z-1|^2}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Im}(\varphi(z)) = -\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{1-|z|^2}{|z-1|^2} > 0$$

car $|z| < 1$. Ainsi, φ est à valeurs dans H.
φ est holomorphe sur D car c'est une fraction rationnelle sans pôle.
Montrons que φ est bijective. Soit $t \in H$. Les calculs donnent que $t = \varphi(z) \iff z = -\frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t}$. Considérons un tel z. Il est bien défini car comme $\mathrm{Im} t > 0$, on a $\mathrm{Re}(\mathrm{i}t) < 0$ et donc $-\mathrm{i}t \neq 1$. En outre,

$$|z|^2 = \frac{|1+\mathrm{i}t|^2}{|1-\mathrm{i}t|^2} = \frac{(1+\mathrm{i}t)(1-\mathrm{i}\overline{t})}{(1-\mathrm{i}t)(1+\mathrm{i}\overline{t})} = \frac{1+|t|^2 - 2\mathrm{Im}(t)}{1+|t|^2+2\mathrm{Im}(t)} < 1$$

car $\mathrm{Im}(t) > 0$. Ainsi, $z \in D$ et l'application $\psi : t \in D \mapsto -\frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t} \in H$ est bien définie, holomorphe et $\psi = \varphi^{-1}$.
En conclusion, l'application φ est un biholomorphisme de D dans H de réciproque ψ et par conséquent, les biholomorphismes de H sont les $\varphi \circ \varphi_{a,\lambda} \circ \psi$, où $(a, \lambda) \in D \times \mathbf{U}$. □

3. Soit $f : D \to \mathbf{C}$ holomorphe et $k \in \mathbf{N}^*$ tels que $f(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0$. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall z \in D, |f(z)| \leq M$. En déduire que pour tout $z \in D$, $|f(z)| \leq M|z|^k$.

Solution. Soit f une telle fonction. Comme $f(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0$, on en déduit que 0 est un zéro d'ordre k de f. De ce fait, il existe $g : D \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que pour tout $z \in D$, $f(z) = z^k g(z)$.
De manière analogue à ce qui a été fait dans la démonstration du lemme de Schwarz, on montre que $|g|$ est majorée par M. Ainsi, on en déduit que pour tout $z \in D$, $|f(z)| = |z^k g(z)| \leq |z|^k M$. □