1.6 Lemme de Morse et une application (171, 214, 215, 218) [19] [4]

Le lemme de Morse est une application du théorème d'inversion locale pour l'étude locale d'une application régulière autour d'un point critique non-dégénéré : ce lemme dit que si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est suffisamment régulière (nous détaillerons les hypothèses au moment de citer le résultat) et qu'elle admet un point critique en un certain $x \in U$, alors f se comporte, autour de x, comme sa hessienne ! Ce résultat est utilisé dans une branche de la géométrie différentielle qui s'appelle la *théorie de Morse* : il s'agit d'étudier certaines variétés différentielles à partir des points critiques de certaines applications définies sur cette variété, appelées *fonctions de Morse*. Je conseille ce développement aux adeptes des équations différentielles pour l'application proposée et aux algébristes qui n'aiment pas le calcul diff s'ils veulent juste faire le lemme de Morse en développement ! Le résultat est plutôt élégant et la démonstration n'est pas très technique !

Théorème 1.14 (Lemme de Morse)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert contenant 0 et $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\mathrm{d}f_0 = 0_{(\mathbb{R}^n)^*}$ et $\mathrm{d}^2 f_0$ soit non-dégénérée, de signature notée $(p, n-p)$. Alors il existe $V, W \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}^n}(0)$ et un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & V & \longrightarrow & W \\ & & x & \longmapsto & (u_1(x), \dots, u_n(x)) \end{array}$$

tels que $\varphi(0) = 0$ et :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} u_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i(x)^2.$$

Démonstration. **Étape 1 : Taylor reste intégral** Étant donné que f est de classe $\mathscr{C}^3$ et que $\mathrm{d}f_0$ est nul, la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = f(0) + \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2 f_{tx}(x,x)\mathrm{d}t.$$

En notant alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $Q(x)$ la matrice de la forme quadratique $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2 f_{tx}\mathrm{d}t$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = f(0) + x^T Q(x) x.$$

À partir de là, pour obtenir le résultat qui nous intéresse, on aimerait passer de $Q(x)$ à $Q(0)$ par un changement de coordonnées, qui puisse être de classe $\mathscr{C}^1$.

Étape 2 : Un changement de coordonnées lisse au voisinage d'une matrice symétrique inversible Montrons qu'au voisinage de $Q(0)$, toute matrice symétrique A s'écrit $A = P(A)^T Q(0) P(A)$ où $P(A)$ est une matrice inversible dépendant de A de manière lisse. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Psi & : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \\ & & P & \longmapsto & P^T Q(0) P. \end{array}$$

Cette application est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car elle est polynômiale en les coordonnées de P. Elle est également bien définie car $Q(0)$ est symétrique. On veut alors pouvoir inverser Ψ pour arriver dans l'ensemble des matrices inversibles. On veut donc pouvoir appliquer le théorème d'inversion locale à l'arrivée autour de $Q(0) = \Psi(I_n)$. Calculons alors $\mathrm{d}\Psi_{I_n}$:

$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{d}\Psi_{I_n} \cdot H = H^T Q(0) + Q(0) H.$$

On observe que, étant donné que $Q(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}\Psi_{I_n}$ est surjective. En effet, si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$\mathrm{d}\Psi_{I_n} \cdot \left(\frac{1}{2} Q(0)^{-1} A\right) = A.$$

Pour rendre cette application inversible, il suffira donc de se placer sur un supplémentaire de son noyau ! Calculons-le :

$$H \in \ker\left(\mathrm{d}\Psi_{I_n}\right) \iff H^T Q(0) = -Q(0)H \iff Q(0)H \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi :

$$\ker\left(\mathrm{d}\Psi_{I_n}\right) = Q(0)^{-1}\mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Soit alors $\tilde{\Psi}$ la restriction de Ψ à $Q(0)^{-1}\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. $\tilde{\Psi}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, $I_n \in Q(0)^{-1}\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ étant donné que $Q(0) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et, d'après ce qu'on a vu, $\mathrm{d}\tilde{\Psi}_{I_n}$ est inversible. Ainsi, d'après le théorème d'inversion locale, il existe $\mathscr{P} \in \mathscr{V}_{Q(0)^{-1}\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}(I_n)$, il existe $\mathscr{Q} \in \mathscr{V}_{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}(Q(0))$ et un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme $P : \mathscr{Q} \longrightarrow \mathscr{P}$ tel que :

$$\forall A \in \mathscr{Q}, \quad A = P(A)^T Q(0) P(A).$$

Étant donné que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, on peut supposer, quitte à restreindre $\mathscr{P}$ (et donc $\mathscr{Q}$ par la même occasion), que $\mathscr{P} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour conclure cette étape 2 !

Étape 3 : Conclusion Étant donné alors que $x \mapsto Q(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (car f est de classe $\mathscr{C}^3$), il existe un voisinage $V' \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}^n}(0)$ tel que $Q(x) \in \mathscr{Q}$ pour tout $x \in V'$. Ainsi, on a :

$$\forall x \in V', \quad Q(x) = P(Q(x))^T Q(0) P(Q(x))$$

et donc :

$$\forall x \in V', \quad f(x) = f(0) + (P(Q(x))x)^T Q(0)(P(Q(x))x).$$

Pour obtenir le résultat souhaité, reste à appliquer le théorème de Sylvester : il existe $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$Q(0) = M^T \begin{pmatrix} I_p & \mathbf{O}_{p,n-p} \\ \mathbf{O}_{n-p,p} & -I_{n-p} \end{pmatrix} M.$$

Ainsi, en notant $\tilde{\varphi} : V' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application définie par :

$$\forall x \in V', \quad \tilde{\varphi}(x) = MP(Q(x))x,$$

on obtient :

$$\forall x \in V', \quad f(x) = f(0) + \tilde{\varphi}(x)^T \begin{pmatrix} I_p & \mathbf{O}_{p,n-p} \\ \mathbf{O}_{n-p,p} & -I_{n-p} \end{pmatrix} \tilde{\varphi}(x)$$

ce qui donne, en notant $\tilde{\varphi}(x) =: (\tilde{u}_1(x), \ldots, \tilde{u}_n(x))$:

$$\forall x \in V', \quad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} \tilde{u}_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \tilde{u}_i(x)^2.$$

On y est presque ! Il ne reste plus qu'à remarquer que $\tilde{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V' par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, que $\varphi(0) = 0$ et que :

$$\forall h \in V', \quad \mathrm{d}\tilde{\varphi}_0 \cdot h = M \underbrace{P(Q(0))}_{=I_n} h + M\left(\mathrm{d}P_{Q(0)} \cdot (\mathrm{d}Q_0 \cdot h)\right) 0 = Mh.$$

Ainsi, par inversibilité de M, la différentielle $\mathrm{d}\varphi_0$ est inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe donc des voisinages $V, W \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}^n}(0)$ tels que la restriction φ de $\tilde{\varphi}$ sur V soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme sur W et alors, en notant $\varphi(x) =: (u_1(x), \ldots, u_n(x))$, on obtient :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} u_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i(x)^2.$$

Cela termine donc la preuve ! □

Une application jolie de ce théorème proposée dans le famoso Bernis-Bernis [4] est l'étude de la stabilité d'un système dynamique soumis à des forces conservatives particulières :

Proposition 1.15 (Stabilité des systèmes Newtoniens)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $U \in \mathscr{C}^3(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ une fonction telle que $\nabla U(0) = 0$ et $\mathrm{d}^2 U_0$ soit définie positive. Considérons l'équation différentielle suivante, d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{U})$:

$$\ddot{x}(t) + \nabla U(x(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors :

1. Il existe un voisinage $\Omega \in \mathscr{V}_{\mathscr{U} \times \mathbb{R}^n}((0,0))$ tel que, pour tout $(x_0, v_0) \in \Omega$, la solution maximale x de l'équation assortie des conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$ soit globale.
2. La solution nulle est une solution stable non asymptotiquement stable de cette équation différentielle.

Démonstration. 1. Avant toute chose, il faut se placer dans les conditions d'applications du théorème de Cauchy-Lipschitz !! Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$. X vérifie le système différentiel :

$$\dot{X} = f(X)$$

où $f : \mathscr{U} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est définie ainsi :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \in \mathscr{U} \times \mathbb{R}^n, \quad f\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\nabla U(x) \end{pmatrix}.$$

On a alors, étant donné que U est de classe $\mathscr{C}^3$, que $f \in \mathscr{C}^2(\mathscr{U} \times \mathbb{R}^n)$, donc f est en particulier $\mathscr{C}^1$, donc en particulier localement lipschitzienne. Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique : pour toute condition initiale $(x_0, v_0) \in \mathscr{U} \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale $X \in \mathscr{C}^1(I, \mathscr{U} \times \mathbb{R}^n)$ au système considéré, définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0 telle que $X(0) = (x_0, v_0)$. Maintenant, il est bien connu (et ça se redémontre facilement à la main) que pour un tel système, l'énergie mécanique est conservée, c'est-à-dire que, si E désigne la fonction :

$$\begin{array}{rccc} E : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, v) & \longmapsto & \frac{1}{2}\|v\|^2 + U(x) \end{array}$$

alors E est une intégrale première du système : si (X, I) est une solution maximale du système différentiel, alors :

$$\forall t \in I, \quad E(x(t), \dot{x}(t)) = E(x(0), \dot{x}(0)).$$

Or, d'après le lemme de Morse, on sait que U se comporte, autour de 0, comme sa hessienne, qui est définie positive ! En fait on aura donc que E se comporte comme une norme ! Ainsi, par continuité, la solution nulle sera stable, et puisque E est conservée, toute solution non-nulle ne peut converger vers 0 à l'infini : la solution nulle ne sera donc pas asymptotiquement stable. Écrivons tout cela proprement : on supposera $U(0) = 0$ quitte à considérer $U - U(0)$, qui a même gradient et même hessienne que U. D'après le lemme de Morse, il existe $V, W \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}^n}(0)$ et un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme φ de $V \subset \mathscr{U}$ sur W tels que $\varphi(0) = 0$ et :

$$\forall x \in V, \quad U(x) = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 U_0 \cdot (\varphi(x), \varphi(x)).$$

Ainsi, en notant :

$$\begin{array}{rccl} J & : & V \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & W \times \mathbb{R}^n \\ & & (x, v) & \longmapsto & (\varphi(x), v) \end{array}$$

on a que J est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $V \times \mathbb{R}^n$ sur $W \times \mathbb{R}^n$ et que :

$$\forall (x, v) \in V \times \mathbb{R}^n, \quad E(x, v) = \mathscr{N}(J(x, v))^2$$

où $\mathscr{N}$ désigne la norme associée à la forme quadratique définie-positive suivante :

$$(y, v) \longmapsto \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \mathrm{d}^2 U_0 \cdot (y, y)\right).$$

Maintenant, puisque $W \times \mathbb{R}^n$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{2n}$ et que les normes sont équivalentes en dimension finie, il existe un rayon $r > 0$ tel que :

$$\underbrace{\mathbb{B}_{\mathscr{N}}((0,0), r)}_{\substack{\text{boule pour la norme} \\ \mathscr{N} \text{ de centre } (0,0) \\ \text{et de rayon } r}} \subset W \times \mathbb{R}^n,$$

de sorte que, si $\Omega := J^{-1}\left(\mathbb{B}_{\mathscr{N}}((0,0), r)\right)$, alors :

$$\forall (x, v) \in \Omega, \quad E(x, v) < r^2 \quad \text{(et non } r \text{ comme écrit dans le Bernis-Bernis !).}$$

Ainsi, si $(x_0, v_0) \in \Omega$, alors la solution maximale $((x, \dot{x}), I)$ de l'équation considérée reste dans le compact $J^{-1}\left(\mathbb{S}_{\mathscr{N}}\left((0,0), \sqrt{\varepsilon_0}\right)\right)$ où $\varepsilon_0 := E(x_0, v_0) < r^2$. Il s'agit d'un compact de $V \times \mathbb{R}^n$ car J est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. En particulier J^{-1} est continue et étant donné que $\mathbb{S}_{\mathscr{N}}\left((0,0), \sqrt{\varepsilon_0}\right) \subset \mathbb{B}_{\mathscr{N}}((0,0), r) \subset W \times \mathbb{R}^n$ est compact, on a bien que $J^{-1}\left(\mathbb{S}_{\mathscr{N}}\left((0,0), \sqrt{\varepsilon_0}\right)\right)$ est compact. Par la contraposée du théorème de sortie de tout compact, on a que la solution maximale $((x, \dot{x}), I)$ est globale, i.e. $I = \mathbb{R}$.

2. Soit $\mathscr{V}$ un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathscr{U} \times \mathbb{R}^n$. Le but est d'exhiber un voisinage $\mathscr{W}$ de $(0,0)$ dans $\mathscr{U} \times \mathbb{R}^n$ tel que si $(x_0, v_0) \in \mathscr{W}$, alors la solution maximale $((x, \dot{x}), I)$ de l'équation différentielle assortie de la condition initiale $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ est globale et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (x(t), \dot{x}(t)) \in \mathscr{V}.$$

Puisque J est un difféomorphisme et que les normes sont équivalentes en dimension finie, il suffit de le vérfier pour les voisinages $\mathscr{V}$ de la forme $J^{-1}\left(\mathbb{B}_{\mathscr{N}}\left((0,0), \sqrt{\rho}\right)\right)$ pour $\rho > 0$. Si $\rho > 0$ et $\mathscr{V} = J^{-1}\left(\mathbb{B}_{\mathscr{N}}\left((0,0), \sqrt{\rho}\right)\right)$, alors en prenant $\mathscr{W} = \Omega \cap \mathscr{V}$, alors toute condition initiale $(x_0, v_0) \in \mathscr{W}$ sera telle que :

(a) La solution maximale $((x, \dot{x}), I)$ associée à la condition initiale (x_0, v_0) est globale d'après le point 1. étant donné que $\mathscr{W} \subset \Omega$,

(b) Puisque E est une intégrale première du mouvement, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E(x(t), \dot{x}(t)) = E(x_0, v_0) < \min(r^2, \rho),$$

c'est-à-dire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (x(t), \dot{x}(t)) \in \Omega \cap \mathscr{V} \subset \mathscr{V}.$$

Ainsi, $(0,0)$ est un point d'équilibre stable.

Si $(0,0)$ était asymptotiquement stable, alors, quitte à restreindre, on aurait à disposition un voisinage $\mathscr{V}'$ de $(0,0)$ inclus dans Ω tel que, si $(x_0, v_0) \in \mathscr{V}'$ on ait, pour la solution globale associée $(x(t), \dot{x}(t))$:

$$(x(t), \dot{x}(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (0,0).$$

Ainsi, par conservation de l'énergie mécanique : $E(x_0, v_0) = \mathscr{N}(J(x_0, v_0))^2 = 0$. Ainsi, par définie-positivité de la norme $\mathscr{N}$, on aurait $J(x_0, v_0) = (0,0)$ et donc puisque J est un difféomorphisme tel que $J(0,0) = (0,0)$, on a : $(x_0, v_0) = (0,0)$! **ABSURDE !**

□

Remarque 1.6.1. — *La partie stabilité peut se passer vite à l'oral si vous arrivez à bien expliquer ce qui va se passer et pourquoi l'hypothèse* $\mathrm{d}^2 U_0$ *définie-positive est importante.*

— *Ce genre de système dynamique est appelé « système Newtonien » car il s'agit de l'équation obtenue grâce à la deuxième loi de Newton appliquée à la particule de position* $x(t)$ *à l'instant* t *lorsque cette particule est soumise à un champ de force dérivant d'un potentiel, i.e. s'écrivant sous la forme* $\boldsymbol{F}(x) = -\nabla U(x)$.