

1.8 Théorème d'échantillonnage de Shannon (201, 213, 234, 250) [10]

De retour dans le merveilleux monde de la physique ! Parlons d'échantillonnage. Ce théorème est le théorème fondamental de la théorie de l'échantillonnage : il dit que si f est une fonction convenable (ici, L^2) telle que sa transformée de Fourier $\hat{f}$ ait un spectre en fréquence limité entre $-\omega_{\max}$ et $\omega_{\max}$, alors, f pourra être retrouvée par échantillonnage pour peu que la fréquence d'échantillonnage soit assez élevée : elle doit dépasser $2 \times f_{\max}$ où $f_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{2\pi}$. Cela se traduit par le théorème suivant :

Théorème 1.18 (Shannon). Pour $A > 0$, posons :

$$\text{BL}_A^2 := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \text{supp}(\hat{f}) \subset [-A, A] \right\}$$

Alors :

1. $(\text{BL}_A^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{R})$.
2. Si φ_A désigne la fonction $\text{sinc}(A \cdot)$, alors la famille $\left(\sqrt{\frac{A}{\pi}} \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL_A^2 .
3. Pour tout $f \in \text{BL}_A^2$, on a :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{A}\right) \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A$$

où la série converge en norme L^2 mais également uniformément.

Démonstration. 1. Pour prouver ce point, il suffira de montrer que BL_A^2 est fermé dans $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$. Soit alors $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\text{BL}_A^2)^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $f \in L^2(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-A, A])} = \|\hat{f} - \hat{f}_k\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-A, A])} \leq \|\hat{f} - \hat{f}_k\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f - f_k\|_2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Ainsi $\hat{f}$ est nulle presque partout sur $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$. Ainsi : $f \in \text{BL}_A^2$, cela conclut ce premier point.

2. Montrons que cette famille est orthonormée. Pour cela, calculons innocemment la transformée de Fourier de la fonction porte $\mathbb{1}_{[-A, A]}$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \widehat{\mathbb{1}_{[-A, A]}}(\xi) = \int_{-A}^A e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{-i\xi} (e^{-iA\xi} - e^{iA\xi}) = 2A \frac{\sin(A\xi)}{A\xi} = 2A \varphi_A(\xi),$$

et cette formule se prolonge sans problème en $\xi = 0$. Ainsi, par formule d'inversion de Fourier L^2 , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi_A}(x) = \frac{\pi}{A} \mathbb{1}_{[-A, A]}(x)$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A}(x) = \frac{\pi}{A} e^{-i \frac{n\pi}{A} x} \mathbb{1}_{[-A, A]}(x).$$

Ainsi, par la formule de Plancherel, on obtient :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad \int_{\mathbb{R}} \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A(x) \overline{\tau_{\frac{m\pi}{A}} \varphi_A(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \left(\frac{\pi}{A}\right)^2 e^{-i \frac{n\pi}{A} \xi} e^{i \frac{m\pi}{A} \xi} d\xi = \frac{\pi}{2A^2} \times 2A \delta_{m,n} = \frac{\pi}{A} \delta_{m,n}.$$

Ainsi, la famille $\left(\sqrt{\frac{A}{\pi}} \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de BL_A^2 . Montrons qu'elle est totale par le critère de densité dans les espaces de Hilbert. Soit $f \in \text{BL}_A^2$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \langle \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A, f \rangle = 0.$$

Montrons que $f = 0$ presque partout. Par la formule de Plancherel, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A(x)} dx = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A \hat{f}(\xi) e^{i \frac{n\pi \xi}{A}} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}\left(\frac{A\zeta}{\pi}\right) e^{in\zeta} d\zeta$$

par changement de variable $\zeta = \frac{\pi \xi}{A}$. Ainsi, en notant g la fonction $\hat{f}\left(\frac{A\cdot}{\pi}\right)$, on reconnaît :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_{-n}(g) = 0$$

où $c_n(g)$ désigne le n -ième coefficient de Fourier de la fonction $g \in L^2(-\pi, \pi)$. Ainsi, par injectivité des coefficients de Fourier, on a que g est nulle presque partout sur $[-\pi, \pi]$, et donc que $\hat{f}$ est nulle presque partout sur $[-A, A]$. Or, $f \in \text{BL}_A^2$ et donc $\hat{f}$ est déjà nulle presque partout en dehors de $[-A, A]$. En définitive, $\hat{f} = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par injectivité de la transformée de Fourier, f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$. La famille $\left(\sqrt{\frac{A}{\pi}} \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est donc bien une base hilbertienne de BL_A^2 !

3. Il faut d'abord montrer que cette écriture à un sens, et donc montrer qu'écrire $f\left(\frac{n\pi}{A}\right)$ a un sens ! Pour cela, montrons que tout $f \in \text{BL}_A^2$ possède un représentant continu. Puisque $f \in \text{BL}_A^2$, on a que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\hat{f}$ est nulle presque partout en dehors de $[-A, A]$. Ainsi, $\hat{f} \in L^2(-A, A)$ et donc, puisqu'on est en mesure finie, $\hat{f} \in L^1(-A, A)$ et donc, en définitive, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Ainsi, par inversion de Fourier L^2 , on a :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\hat{f}}(-x)$$

presque partout, mais étant donné que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a la description explicite de $\widehat{\hat{f}}$:

$$\widehat{\hat{f}}(-x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \text{ presque partout.}$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et la fonction au second membre est une fonction continue (et tendant vers 0). On identifiera donc f à cette fonction continue. Remarquons par ailleurs (cela servira par la suite) que, par inégalité de Cauchy-Schwarz et formule de Plancherel (encore ! Ça fait beaucoup là, non ?) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2 \times \sqrt{2A} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \|f\|_2$$

et donc :

$$\forall f \in \text{BL}_A^2, \quad \|f\|_{\infty} \leq \sqrt{\frac{A}{\pi}} \|f\|_2.$$

On est prêt à conclure : puisque la famille $\left(\sqrt{\frac{A}{\pi}} \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL_A^2 , on a, par la formule de Bessel-Parseval :

$$f = \frac{A}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A \rangle \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A$$

où la série converge en norme L^2 . Or, on a déjà calculé le produit scalaire dans la somme dans le point 2 ! Souvenez-vous, on avait :

$$\langle f, \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A \rangle = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A \hat{f}(\xi) e^{i \frac{n\pi \xi}{A}} d\xi.$$

Or, par l'identification de f avec son représentant continu $\frac{1}{2\pi} \widehat{\hat{f}}(-\cdot)$, on a que cette expression est rigoureux-

sement égale à $\frac{\pi}{A} \times f\left(\frac{n\pi}{A}\right)!$ Ainsi, on a :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{A}\right) \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A$$

où la convergence est en norme L^2 . Cependant, on a vu que si $f \in \text{BL}_A^2$, alors :

$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{\frac{A}{\pi}} \|f\|_2.$$

Ainsi, la convergence est également uniforme! Cela conclut la démonstration. $\square$

Remarque 1.8.1 (Ce que dit le rapport du jury). *Le rapport du jury indique que ce théorème traduit une isométrie. En fait, pour tout espace de Hilbert séparable H , si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H , alors l'application :*

$$\begin{aligned} J : H &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ v &\longmapsto (\langle v, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

est une isométrie bijective. Dans le cas de l'échantillonnage de Shannon, on a donc que l'application :

$$\begin{aligned} \text{BL}_A^2 &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto \left(\sqrt{\frac{\pi}{A}} f\left(\frac{n\pi}{A}\right) \right)_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

est une isométrie bijective. C'est l'objet véritablement du théorème de Shannon! Si f est à spectre borné dans $[-A, A]$, alors f est entièrement déterminée par ses valeurs en les $\frac{n\pi}{A}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, ce qui correspond à échantillonner f avec une période d'échantillonnage de $\frac{\pi}{A}$, et donc une fréquence d'échantillonnage de $\frac{A}{\pi} = 2 \times \frac{A}{2\pi}$, où $\frac{A}{2\pi}$ correspond à la fréquence maximale apparaissant dans $\hat{f}$!

Remarque 1.8.2 (Sous-échantillonnage). Si $f \in \text{BL}_A^2$ et qu'on décide au final d'échantillonner f avec une fréquence trop faible, de la forme $(1-\lambda)\frac{A}{\pi}$ avec $\lambda \in (0, \frac{2}{3})$, alors on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n\pi}{(1-\lambda)A}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \hat{f}(\xi) e^{i \frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-A}^{-(1-\lambda)A} \hat{f}(\xi) e^{i \frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}} d\xi + \int_{-(1-\lambda)A}^{(1-\lambda)A} \hat{f}(\xi) e^{i \frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}} d\xi + \int_{(1-\lambda)A}^A \hat{f}(\xi) e^{i \frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}} d\xi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-3(1-\lambda)A}^{-(1-\lambda)A} \hat{f}(\xi) e^{i \frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}} d\xi + \int_{-(1-\lambda)A}^{(1-\lambda)A} \hat{f}(\xi) e^{i \frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}} d\xi + \int_{(1-\lambda)A}^{3(1-\lambda)A} \hat{f}(\xi) e^{i \frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}} d\xi \right) \end{aligned}$$

car $\lambda \in (0, \frac{2}{3})$ et donc $3(1-\lambda)A > A$ et donc $\hat{f}$ est nulle sur $[-3(1-\lambda)A, -A]$ et sur $[A, 3(1-\lambda)A]$. En effectuant le changement de variable $\xi' = \xi + 2(1-\lambda)A$ dans la première intégrale et $\xi' = \xi - 2(1-\lambda)A$ dans la troisième intégrale, on obtient :

$$f\left(\frac{n\pi}{(1-\lambda)A}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-(1-\lambda)A}^{(1-\lambda)A} \left(\hat{f}(\xi - 2(1-\lambda)A) \underbrace{e^{-2in\pi}}_{=1} + \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi + 2(1-\lambda)A) \underbrace{e^{2in\pi}}_{=1} \right) e^{i \frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}} d\xi$$

Ainsi, si $g \in \text{BL}_{(1-\lambda)A}^2$ est telle que :

$$\text{pour presque tout } \xi \in [-(1-\lambda)A, (1-\lambda)A], \quad \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - 2(1-\lambda)A) + \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi + 2(1-\lambda)A)$$

alors la fonction recréée par cet échantillonnage de f est g ! Cela revient à créer une fonction g dont le spectre en

fréquence correspond au spectre de f qu'on a « replié » sur les bords (un beau dessin peut être réalisé si vous le souhaitez)