Définition. *Soit $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, on définit la n-ième factorielle croissante (respectivement décroissante) de x par $x^{\underline{n}}$ (respectivement $x^{\overline{n}}$) par $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$ et $x^{\underline{n+1}} = (x-n)x^{\underline{n}}$ et $x^{\overline{n+1}} = (x+n)x^{\overline{n}}$*

Définition. *On définit les nombres de Sterling de première espèce : pour $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, ..., n\}$, $x^{\underline{n}}$ est un polynome entier en x et on note $s(n,k)$ les entiers tels que*

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$$

théorème. *Soit Σ une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(\mathfrak{S}_n)$ et C la variable aléatoire qui compte le nombre de cycles à uppor disjoints apparaissant dans la décomposition de Σ. Alors la série génératrice de C est*

$$G_C(t) = \frac{t^{\overline{n}}}{n!}$$

En particulier

$$\mathbb{P}(C = k) = \frac{|s(n,k)|}{n!}$$

et

$$\mathbb{E}(C) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Démonstration. *Voyons d'abord que*

$$\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|x^k = x^{\overline{n}}$$

En effet en developpant l'ecriture de $x^{\overline{n}}$ et $x^{\underline{n}}$ on a

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)...(x+n-1),\ \ x^{\underline{n}} = x(x-1)...(x-n+1)$$

donc

$$(-x)^{\underline{n}} = (-1)^n x^{\overline{n}}$$

donc

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k)x^k$$

. Or $x^{\overline{n}}$ est un polynome entier a coeficients positifs en x donc pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $(-1)^{n-k}s(n,k) \geq 0$ et donc $(-1)^{n-k}s(n,k) = |s(n,k)|$ d'où l'égalité énoncée. Par la relation de récurrence de la factorielle croissante on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} |s(n+1,k)|x^k &= x^{\overline{n+1}} \\
&= (x+n)x^{\overline{n}} \\
&= (x+n)\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|x^k \\
&= |s(n,n)|x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (|s(n,k-1)| + n|s(n,k)|)x^k
\end{aligned}$$

D'où la relation $|s(n,0)| = 0,\ \ |s(n,n)| = n$ et $|s(n+1,k) = |s(n,k-1)| + n|s(n,k)|$

Notons $\mathfrak{S}_{n,k}$ l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui sont des produits dee k cycles à supports disjoints et $C(n,k)$ son cardinal. On a $C(n,0) = 0$ et $C(n,n) = 1$. (On considère que l'identité est le produit de n $1-$cycles à support disjoint). On a

$$\mathfrak{S}_{n+1,k} = \bigsqcup_{m=1}^{n+1} \mathfrak{S}_{n+1,k}(m)$$

où $\mathfrak{S}_{n+1,k}(m) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1,k} |\ \sigma(n+1) = m\}$

Si $m = n+1$ *alors l'application de restriction à* $\{1, ..., n\}$ *est une bijection de* $\mathfrak{S}_{n+1,k}$ *dans* $\mathfrak{S}_{n,k-1}$ *donc* $|\mathfrak{S}_{n+1,k}(n+1)| = |\mathfrak{S}_{n,k-1}| = C(n, k-1)$.

SI $m \leq n$. *Soit*$\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1,k}(m)$ *que l'on décompose* $\sigma = c \circ c_2 \circ ... \circ c_k$ *où* $c = (n+1\ m\ i_3\ ...\ i_r)$. *On pose* $\sigma' = (n+1\ m) \circ \sigma$. *Alors* $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n+1,k}(n+1)$ *et donc la restriction de* σ' *àà* $\{1, ..., n\}$ *est dans* $\mathfrak{S}_n$. *On note* $f(\sigma)$ *cette restriction. voyons que* $f(\sigma) \in \mathfrak{S}_{n,k}$ *et que* f *est injective. On observe d'abord que* σ' *s'ecrit* $\sigma' = c' \circ c_2 \circ ... \circ c_k$ *où* $c' = (m\ i_3\ ...\ i_r)$. *Tous les entiers apparaissant dans le support de* σ' *sont entre* 1 *et* n *donc* $f(\sigma) = c' \circ c_2 \circ ... \circ c_k \in \mathfrak{S}_{n,k}$. *Voyons que* f *est injective, soit* $\sigma,\ \tau \in \mathfrak{S}_{n+1,k}(m)$ *telles que* $f(\sigma) = f(\tau)$. *On note* σ *comme précédemment,* $\tau = (n+1\ m\ j_3\ ...\ j_s) \circ \tilde{c}_2 \circ ... \circ \tilde{c}_k$. *On a alors*

$$(m\ i_3\ ...\ i_r) \circ c_2 \circ ... \circ c_k = (m\ j_3\ ...\ j_s) \circ \tilde{c}_2 \circ ... \circ \tilde{c}_k$$

. On en déduit $r = s,\ i_a = j_a$ *et a permutation des indices près* $c_a = \tilde{c}_a$ *donc* $\sigma = \tau$. *D'autre part à* $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n,k}$ *donné, on peut assosier* $\sigma = (n+1, m) \circ \sigma'$ *et alors* $f(\sigma) = \sigma'$ f *est donc bijective de* $\mathfrak{S}_{n+1,k}(m)$ *dans* $\mathfrak{S}_{n,k}$ *Donc*

$$C(n+1,k) = |\mathfrak{S}_{n+1,k}| = \sum_{m=1}^{n+1} |\mathfrak{S}_{n+1,k}(m) = C(n,k-1) + \sum_{k=1}^{n} C(n,k) = C(n,k-1) + nC(n,k)$$

On obtient ainsi par uune recurrence immédiate que $C(n,k) = |s(n,k)|$ *puisqu'ils suivent la même relation de récurrence avec les mêmme conditions initiales.*

Si $\Sigma \sim \mathcal{U}(\mathfrak{S}_n)$ *Et* C *désigne le nombre de cycles à supports disjoints de* Σ *alors*

$$\mathbb{P}(C = k) = \frac{C(n,k)}{n!} = \frac{|s(n,k)|}{n!}$$

et sa série génératrice est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(C = k) t^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{|s(n,k)|}{n!} t^k = \frac{t^{\overline{n}}}{n!}$$

On a $\mathbb{E}(C) = G'_C(1)$*, calculons la dérivée de* G_C

$$\begin{aligned}
G'_C(t) &= (exp(n!ln(t^{\overline{n}})))' \\
&= exp(n!ln(t^{\overline{n}}))ln(t^{\overline{n}})' \\
&= G_C(t) ln(t^{\overline{n}})' \\
&= G_C(t) \sum_{k=0}^{n-1} ln(t+k)' \\
&= G_C(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t+k}
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(C) = G'_C(1) = G_C(1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$