théorème. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$ *où les* (b_n) *sont les nombres de Bernouills que l'on définira*

Démonstration. *Soit* $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$, $\begin{array}{cccc} \varphi_z & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & & x & \to & exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right) \end{array}$ *et* $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \to & \frac{z}{e^z-1} \end{array}$

φ_z *est* 2π *périodique et continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$. *Calculons ses coefficients de fourier.*

$$\begin{aligned} c_n(\varphi_z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_z(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{zx}{2\pi}}e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{\frac{zx}{2\pi}}e^{-inx}}{\frac{z}{2\pi}-in}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n(e^{z/2}-e^{-z/2})}{z-2in\pi} \end{aligned}$$

Comme φ_z *est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* $\mathbb{R}$, *le théorème de Dirichlet assure que sa série de Fourier converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers* $x \to \frac{\varphi_z(x+)-\varphi_z(x-)}{2}$ *donc* $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\varphi_z(x+)+\varphi_z(x-)}{2} = (e^{z/2}-e^{-z/2})\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n e^{inx}}{z-2in\pi}$$

En $x = \pi$ *on a* $\frac{\varphi_z(\pi+)+\varphi_z(\pi-)}{2} = \frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{2}$ *d'où*

$$\begin{aligned} \frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{2} &= (e^{z/2}-e^{-z/2})\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z-2in\pi} \\ \frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{2} &= (e^{z/2}-e^{-z/2})\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{z+2in\pi}{z^2+4n^2\pi^2} \\ \frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{2(e^{z/2}-e^{-z/2})} &= \frac{1}{z}+\sum_{n\geq 1}\frac{z}{z^2+4n^2\pi^2} \end{aligned}$$

Le membre de gauche donne

$$\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{2(e^{z/2}-e^{-z/2})} = \frac{e^z+1}{2(e^z-1)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{e^z-1}$$

D'où l'expression pour f *:*

$$f(z) = \frac{z}{e^z-1} = 1-\frac{z}{2}+2\sum_{n\geq 1}\frac{z^2}{z^2+4n^2\pi^2}$$

Trouvons un DSL de cette somme. Soit $n \geq 1$, *si* $|z| < 2\pi$, $\left|\frac{z}{2n\pi}\right| < 1$ *et donc*

$$\frac{z^2}{z^2+4n^2\pi^2} = \frac{z^2}{4n^2\pi^2}\frac{1}{1+\frac{z^2}{4n^2\pi^2}} = \frac{z^2}{4n^2\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2n\pi)^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2n\pi)^{2k}}$$

On veut utilisier Fubini, on rappel que l'on a supposé $|z| < 2\pi$

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}\frac{|z|^{2k}}{(2n\pi)^{2k}} &= \sum_{n\geq 1}\frac{|z|^2}{4n^2\pi^2-|z|^2} &(1)\\ &< \sum_{n\geq 1}\frac{(4\pi)^2}{4n^2\pi^2-4\pi^2} &(2)\\ &< \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2-1} &(3) \end{aligned}$$

qui converge par critère de Riemann. On observe de plus que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ on obtient ainsi pour tout $|z| < 2\pi$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2n\pi)^{2k}} \\
&= 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2n\pi)^{2k}} \\
&= 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k\geq 1}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2k}}\right)z^{2k}
\end{aligned}
$$

l'égalitée est aussi bien vérifiée en $z = 0$, on a bien trouvé le DSE de f autour de 0 dans un rayon de 2π

On définit les nombres de Bernouilli b_n par $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{n!}z^n$. Par unicité du DSE

$$
\begin{aligned}
\frac{b_{2k}}{(2k)!} &= 2\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^{2k}} \\
\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^{2k}} &= (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}b_{2k}}{2(2k)!}
\end{aligned}
$$

Précison un peu la nature des b_n :

On a trouvé dans la formule précédente $b_0 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_{2n+1} = 0$.

Comme sur le disque de convergence les séries entières convergent normalement, il vient par le produit de Cauchy pour $|z| < 2\pi$

$$
\begin{aligned}
f(z)(e^z - 1) = z &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{b_n}{n!}z^n\sum_{\geq 1}\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k z^n}{k!(n-k)!}
\end{aligned}
$$

Par unicité du DSE de la fonction $id_{\mathbb{C}}$ on a pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!(n-k)!} = 0$. En multipliant par $n!$ il vient $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k = 0$ d'ou la relation de récurrence

$$
b_{n-1} = -\frac{1}{\binom{n}{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}b_k = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}b_k
$$

Par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \in \mathbb{Q}$. On peut calculer par exemple $b_2 = \frac{1}{6}$ et $b_4 = -\frac{1}{30}$