Définition. *Pour $x > 0, y > 0$ on définit*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \text{ et } B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

théorème.

1. *Γ est bien définie et $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0,+\infty[$*
2. *Γ et $ln(\Gamma)$ sont convexes sur $]0,+\infty[$*
3. *$\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$*
4. *allure du graphe*
5. *$B(x,y) = B(y,x)$, $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$*
6. *$\forall x > 0$,*
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$$

Démonstration.

1. *pour $x > 0, t > 0$ on pose $g(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$. On a $g(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$. Ainsi $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ est de même nature que $\int_0^1 t^{x-1}dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ qui converge car $x > 0$, $1-x < 1$. d'autre part pour tout $x > 0$, $g(x,t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge. Finalement $\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est bien définie.*
   On a $t \to g(x,t)$ est mesurable car continue, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^n}{\partial x^n}g(x,t) = ln(t)^n g(x,t)$ continue en t et en x. Soient $0 < a < b < \infty$, Pour tout $x \in [a,b]$,
   Si $0 < t < 1$, $|ln(t)^n t^{x-1}e^{-t}| \leq |ln(t)^n| t^{a-1} = o(t^{\frac{a}{2}-1})$ qui est integrable sur $]0,1[$.
   Si $1 \leq t < \infty$, $|ln(t)^n t^{x-1}e^{-t}| \leq |ln(t)^n| t^{b-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ intégrable sur $[1,\infty[$. On peut donc dominer
$$|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)| \leq |ln(t)^n| t^{a-1}\mathbb{1}_{]0,1[} + |ln(t)^n| t^{b-1}e^{-t}\mathbb{1}_{[1,\infty[}$$
   Ainsi par le théorème de convergence dominé, $\Gamma(x)$ est $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, pour tout $0 < a < b < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\mathcal{C}^{\infty}$
2. *Γ est $\mathcal{C}^2$ et on a $\Gamma''(x) = \int_0^{\infty} ln(t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt \geq 0$ donc Γ est convexe. Posons $f = ln \circ \Gamma$. On a*
$$f'' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$$
   . Etudions Γ'^2
$$\begin{aligned}
\Gamma'(x) &= \int_0^{\infty} ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt \\
&= \int_0^{\infty} (ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}})(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}})dt \\
&\leq \left(\int_0^{\infty} (ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}})^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\infty} (t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}})^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad par\ Cauchy-Schwarz \\
&\leq \left(\int_0^{\infty} ln(t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\Gamma(x)\Gamma''(x))^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$
   Ainsi $f'' \geq 0$ donc f est convexe
3. *soit $x > 0$,*
$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t}dt \\
&= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -xt^{x-1}e^{-t}dt \\
&= x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

4. *$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$. $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)\underset{x\to 0^+}{\to}\Gamma(1)=1$ Ainsi $\Gamma\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{x}$. On a par une récurrence immédiate pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$, en particulier $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$. Ainsi par le théorème de Rolle il existe $c\in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c)=0$. Comme Γ est convexe Γ' est croissante donc Γ est décroissante sur $]0,c]$ puis croisante sur $[c,+\infty[$, $\Gamma(x)\underset{x\to\infty}{\to}\infty$. $\frac{\Gamma(x)}{x}=\frac{(x-1)\Gamma(x-1)}{x}\underset{x\to\infty}{\to}\infty$ donc Γ admet une branche parabolique d'axe Oy en $+\infty$*
5. *Par changement de variable $u=1-t$*

$$\begin{aligned}B(y,x)&=\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt\\&=\int_0^1(1-u)^{y-1}u^{x-1}du=B(x,y)\end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned}B(x+1,y)&=\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt\\&=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^x(1-t)^{x+y-1}dt\\&=\left[\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\frac{-(1-t)^{x+y}}{x+y}\right]_0^1-\int_0^1 x\frac{1-t+t}{(1-t)^2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{-(1-t)^{x+y}}{x+y}dt\\&=0-\frac{x}{x+y}\int_0^1-t^{x-1}(1-t)^{x+y-x-1}dt\\&=\frac{x}{x+y}B(x,y)\end{aligned}$$

6. *Soit $x>0, n\in\mathbb{N}^*$. On pose $g_n(t)=t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathbb{1}_{0<t\leq n}$. Pour tout $t>0$, $g_n(t)\underset{n\to\infty}{\to}g(t)$. Par convexité de exp, pour tout $u\in\mathbb{R}$, $e^u\geq 1+u$ donc $e^{-\frac{t}{n}}\geq 1-\frac{t}{n}$ et donc $e^{-t}\geq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$. Finalement pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g_n(t)\leq g(t)$ et g est intégrable. Par le théorème de convergence dominé, $\int_0^\infty g_n(t)dt\to\Gamma(x)$. Or*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g_n(t)dt&=\int_0^n(1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt\\&=\int_0^1(1-u)^n(nu)^{x-1}ndu\\&=n^xB(x,n+1)\\&=n^x\frac{n}{x+n}B(x,n)\\&=n^x\frac{n!}{(x+1)...(x+n)}B(x,1)\\&=n^x\frac{n!}{(x+1)...(x+n)}\int_0^1 t^{x-1}dt\\&=n^x\frac{n!}{(x+1)...(x+n)}\frac{1}{x}\\&=n^x\frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{n^xn!}{x(x+1)...(x+n)}\underset{n\to\infty}{\to}\Gamma(x)$$