théorème. *On identifie* $\mathbb{C}$ *à* $\mathbb{R}^2$. *On considère* $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ *l'ensembles des fonctions holomorphes sur le disque unité de carré intégrable. On munit cet espace du produit hermitien*
$< f|g >= \int\int_{\mathbb{D}} f(x+iy)\overline{g(x+iy)}dxdy$. *Alors*

- $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ *est un espce de Hilbert*
- *Si* $e_n : z \to \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$, *alors* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base Hilbertienne de* $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$

Démonstration.

- *Comparons* $|| \ ||_\infty$ *et* $|| \ ||_2$. *Soit* $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. *Soit* $K \subset \mathbb{D}$ *un compact,* $d = d(K, \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) = d(K, \mathbb{S}^1)$ *Soit* $a \in K$. *La formule de la moyenne donne pour tout* $r < d$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^d rf(a)dr &= \frac{1}{2\pi}\int_0^d\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})rd\theta dr\\
\frac{d^2}{2}f(a) &= \frac{1}{2\pi}\int\int_{D(a,d)} f(x+iy)dxdy\\
|f(a)| &= \frac{1}{d^2\pi}\left|\int\int_{D(a,d)} f(x+iy)dxdy\right|\\
|f(a)| &\leq \frac{1}{d^2\pi}\langle f|1\rangle_D\\
|f(a)| &\leq \frac{1}{d^2\pi}||f||_{2,D}\ ||1||_{2,D}\\
|f(a)| &\leq \frac{1}{d\sqrt{\pi}}||f||_{2,D} \leq \frac{1}{d\sqrt{\pi}}||f||_2\\
||f||_\infty &\leq \frac{1}{d\sqrt{\pi}}||f||_2
\end{aligned}$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy de* $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$. *Soit* $K \subset \mathbb{D}$ *un compact,* $d = d(K, \mathbb{S}^1)$. *Pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$, $||f_n - f_m||_\infty \leq \frac{1}{d\sqrt{\pi}}||f_n - f_m||_2$ *donc* f_n *et uniformément de Cauchy et donc converge uniformément vers* f *holomorphe sur tout compact de* $\mathbb{D}$ *et donc sur* $\mathbb{D}$. *D'autre part* $L^2(\mathbb{D})$ *est complet et donc admet une limite* $g \in L^2(\mathbb{D})$. *par le théorème de Riesz-Fischer il existe une sous suite* $(f_{\phi(n)})$ *qui converge presque partout vers* g *dans* $\mathbb{D}$. *Ainsi* $f = g$ *presque partout donc* $f \in L^2(\mathbb{D})$. $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ *est complet.*

- *calculons pour* n, m

$$\begin{aligned}
< e_n|e_m > &= \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \overline{z^n}z^m dxdy\\
&= \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi}\int_0^1 r^{n+m+1}dr\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta\\
&= \frac{2\pi\sqrt{(n+1)(m+1)}}{(n+m+2)\pi}\delta_{n,m}\\
&= \frac{2\pi(n+1)}{(2n+2)\pi}\delta_{n,m} = \delta_{n,m}
\end{aligned}$$

Soit f *dans* $\mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ *voyons que* $f \in Vect(e_n)$. *Supposons* $f \in Vect(e_n)^\perp$. *on note* $c_n(f) =< f|e_n >= 0$. *Comme* f *est holomorphe on a il existe* (a_n) *une suite de complexes tels que pour tout* $z \in \mathbb{D}$,

$f(z) = \sum a_n z^n$ alors

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{z}^n dxdy \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \int_{|z|\leq r} f(z)\overline{z}^n dxdy \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \sum_{m\in\mathbb{N}} a_m \int_{|z|\leq r} z^m\overline{z}^n dxdy
\end{aligned}$$

La première églité venant du théorème de convergence dominée et la seconde par la convergence normale sur tout compact de la série. On calcule de la même façon que précedemment.

$$\begin{aligned}
\int_{|z|\leq r} z^m\overline{z}^n dxdy &= \frac{2\pi r^{n+m+2}}{n+m+2}\delta_{n,m} \\
&= \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}\delta_{n,m}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \sum_{m\in\mathbb{N}} a_m \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}\delta_{n,m} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n \lim_{r\to 1} r^{2n+2} \\
0 &= a_n
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ et donc $f = 0$. Finalment $Vect(e_n)^{\perp} = 0,\ Vect(e_n) = \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ donc (e_n) est une base hilbertienne