

Développement : Théorème de RUNGE (faible)

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [QUE] QUEFFÉLEC H., *Topologie, Cours et exercices corrigés*, 5^{ème} édition, Dunod, 2006, p140.

(Aussi trouvable dans les autres éditions, en particulier dans la 3^{ème} édition à la page 124)

Pour les leçons :

- 203 : Utilisation de la notion de compacité.
- 204 : Connexité. Exemples et applications.
- 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Théorème 1. Théorème de RUNGE (faible).

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact de complémentaire connexe.

Alors, pour tout $a \in K^c := \mathbb{C} \setminus K$, la fonction $\varphi_a : z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est limite uniforme sur K de polynômes.

PREUVE : Soit $P(K)$ l'adhérence des polynômes dans $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty, K})$.

$P(K)$ est stable par somme et par produit : en effet, si $f, g \in P(K)$, on sait que f et g sont limites uniformes de polynômes sur K , notés respectivement $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $(P_n + Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(P_n Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $f + g$ et fg (pour la norme uniforme sur K).

Montrons que pour tout $a \in K^c$, $\varphi_a \in P(K)$. On pose $A = \{a \in K^c \mid \varphi_a \in P(K)\}$, et montrons que $A = K^c$.

★ ÉTAPE 1 : Montrons que A est non vide.

Soit $R = \sup_{z \in K} (|z|)$. R est fini en tant que supremum d'une fonction continue $(|\cdot|)$ sur un compact.

Soit $a \in K^c$ tel que $|a| > R$ (en particulier, $a \neq 0$). Pour tout $z \in K$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_a(z) &= \frac{1}{z-a} \\ &= -\frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} \\ &\stackrel{\left|\frac{z}{a}\right| < 1}{=} -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}. \end{aligned}$$

En outre, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{a^{n+1}}$ est une série de fonctions qui converge normalement sur K . En effet, pour tout $z \in K$:

$$\left| \frac{z^n}{a^{n+1}} \right| < \frac{1}{R} \left(\frac{R}{|a|} \right)^n,$$

et $0 < \frac{R}{|a|} < 1$ par hypothèse, donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{R} \left(\frac{R}{|a|} \right)^n$ converge.

On pose donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = -\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{a^{k+1}} \in \mathbb{C}[X]$. Alors, pour tout $z \in K$, d'après le travail précédent :

$$|\varphi_a(z) - P_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{a^{k+1}} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R^k}{|a|^{k+1}},$$

et donc :

$$\|\varphi_a - P_n\|_{\infty, K} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R^k}{|a|^{k+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $\varphi_a \in A$, et A n'est pas vide.

★ ÉTAPE 2 : Montrons que A est un fermé de K^c .

Pour cela, on montre que $\bar{A} \cap K^c$ est un fermé de $\mathbb{C}$. Soit $a \in \bar{A} \cap K^c$. On note $d = d(a, K) > 0$ (car sinon, $a \in K$, ce qui est proscrit).

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (A \cap K^c)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a . Montrons que $a \in A$. Quitte à translater $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, comme elle converge vers a , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n - a| \leq \frac{d}{2}.$$

Donc, pour tout $z \in K$, on a :

$$\begin{aligned} |\varphi_{a_n}(z) - \varphi_a(z)| &= \left| \frac{1}{z - a_n} - \frac{1}{z - a} \right| \\ &= \frac{|a_n - a|}{|z - a_n||z - a|}, \end{aligned}$$

avec $|z - a| \geq d$, puisque $z \in K$ et que $d = d(a, K)$. De plus :

$$|z - a| \leq |z - a_n| + |a_n - a|,$$

et donc :

$$|z - a_n| \geq |z - a| - |a_n - a| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

Cela permet d'écrire :

$$|\varphi_{a_n}(z) - \varphi_a(z)| \leq \frac{|a_n - a|}{\frac{d}{2} \times d} = \frac{2}{d^2} |a_n - a|,$$

et ce, pour tout $z \in K$. Donc :

$$\|\varphi_{a_n} - \varphi_a\|_{\infty, K} \leq \frac{2}{d^2} |a_n - a| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc φ_a est limite uniforme de $(\varphi_{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Or, comme $a_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que $\varphi_{a_n} \in P(K)$ qui est fermé, donc $\varphi_a \in P(K)$. Autrement dit, $a \in A$, ce qui prouve l'assertion souhaitée.

★ ÉTAPE 3 : Montrons que A est un ouvert de K^c .

Pour cela, montrons que $A \cap K^c$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soient $a \in A$, et on note encore $d = d(a, K) > 0$. Montrons que :

$$\mathbb{D}\left(a, \frac{d}{2}\right) \subset A.$$

Soit $h > 0$ tel que $a + h \in \mathbb{D}\left(a, \frac{d}{2}\right)$ (i.e. $|h| \leq \frac{d}{2}$). Soit $z \in K$. On a $\left| \frac{h}{z - a} \right| \leq \frac{\frac{d}{2}}{d} = \frac{1}{2} < 1$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_{a+h}(z) &= \frac{1}{z - a - h} \\ &= \frac{1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{h}{z - a}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{(z - a)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} h^n \varphi_a(z)^{n+1}. \end{aligned}$$

Cette série de fonctions converge normalement sur K . En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{h^n}{(z - a)^{n+1}} \leq \left(\frac{d}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n d}$, qui est le terme d'une série géométrique convergente. En particulier, cette série de fonctions converge uniformément sur K .

Cela signifie que, en notant, pour $N \in \mathbb{N}$, $f_N : z \mapsto \sum_{n=0}^N h^n \varphi_a(z)^{n+1}$, $(f_N)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ_{a+h} .

Pourtant, les f_N sont dans $P(K)$, par somme finie d'éléments de $P(K)$. Comme $P(K)$ est fermé pour la convergence uniforme, $\varphi_{a+h} \in P(K)$, ce qui prouve que $a + h \in A$.

Par conséquent, $\mathbb{D}\left(a, \frac{d}{4}\right)$ est un voisinage ouvert de a inclus dans A , pour tout $a \in A$. Cela prouve que A est ouvert.

★ ÉTAPE 4 : Concluons : montrons que $A = K^c$.

A est un ouvert et un fermé de K^c , qui est supposé connexe. Comme il est non vide, $A = K^c$, ce qui achève la preuve. $\square$