

Développement : Projection sur un convexe fermé

ANALYSE & PROBABILITÉS
ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE

Référence : [GX] GOURDON X., *Les maths en tête, Analyse, 2^{ème} édition*, ellipses, 2008, p407.

Pour les leçons :

- 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.
- 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
- 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 213 : Espaces de HILBERT. Exemples d'applications.
- 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Théorème 1. *Projection sur un convexe fermé.*

Soient C un sous-ensemble convexe fermé (non vide) de H , et $x \in H$. Alors :

$$\exists! y \in C \quad \|x - y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

y est appelé *projection orthogonale de x sur C* , qu'on note $p_C(x)$. Cet élément y est caractérisé par la propriété :

$$\forall z \in C \quad \langle z - y | x - y \rangle \leq 0.$$

PREUVE : Soit $\delta = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$. Alors, $\delta = \inf(F)$, où $F = \{\|x - z\|, z \in C\}$, et on sait alors que :

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta.$$

Il existe donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta$.

★ ÉTAPE 1 : Montrons que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de CAUCHY : comme H est un espace de HILBERT, cela donnera que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Comme $\|\cdot\|$ est issue d'un produit scalaire, d'après l'identité du parallélogramme, on a :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad \|(x - y_p) + (x - y_q)\|^2 + \|y_p - y_q\|^2 = 2(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2).$$

Comme C est convexe, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a $\frac{y_p + y_q}{2} \in C$. Donc $\left\|x - \frac{y_p + y_q}{2}\right\| \geq \delta$, par définition de δ .

Par suite :

$$\|(x - y_p) + (x - y_q)\|^2 = 4 \left\|x - \frac{y_p + y_q}{2}\right\|^2 \geq 4\delta^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|y_p - y_q\|^2 &\leq -4\delta^2 + 2(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2) \\ &\leq 2((\|x - y_p\|^2 - \delta^2) + (\|x - y_q\|^2 - \delta^2)). \end{aligned}$$

Comme $\|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta$, on en déduit que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY.

★ ÉTAPE 2 : Soit y la limite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrons que y est unique. Soit $z \in C$ tel que $\|x - z\| = d(x, C) = \delta$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \begin{cases} y & \text{si } n \text{ est pair} \\ z & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\|x - z_n\| = \delta$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - z_n\| = \delta$, et par l'ÉTAPE 1, on a que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. En particulier, $(z_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, ce qui prouve que $z = y$, et on a l'unicité.

★ ÉTAPE 3 : Montrons la caractérisation. Soit $y \in C$ tel que :

$$\forall z \in C \quad \langle z - y | x - y \rangle \leq 0.$$

Soit $z \in C$. On a :

$$\begin{aligned} \|z - x\|^2 &= \|(z - y) - (x - y)\|^2 \\ &= \|z - y\|^2 + \|x - y\|^2 - 2\langle z - y | x - y \rangle \\ &\geq \|z - y\|^2 + \|x - y\|^2 \\ &\geq \|x - y\|^2, \end{aligned}$$

et donc, pour tout $z \in C$, on a $\|z - x\| \geq \|y - x\|$. Comme $y \in C$, $\|y - x\| = d(x, C)$, et donc par l'ÉTAPE 2, $y = p_C(x)$. Il reste à démontrer que $y := p_C(x)$ vérifie l'inégalité souhaitée. Soit $z \in C$. Déjà, par définition de y , on a :

$$\|x - z\|^2 \geq \|x - y\|^2.$$

Comme $\|x - z\|^2 = \|(x - y) - (z - y)\|^2$, il vient, en développant :

$$-2\langle x - y | z - y \rangle + \|z - y\|^2 \geq 0.$$

Soit $z_0 \in C$. Comme C est convexe, on se donne $t \in]0, 1]$ et on pose $z = tz_0 + (1 - t)y \in C$. L'inégalité précédente devient :

$$-2\langle x - y | tz_0 + (1 - t)y - y \rangle + \|tz_0 + (1 - t)y - y\|^2 \geq 0,$$

c'est-à-dire :

$$-2\langle x - y | tz_0 - ty \rangle + \|tz_0 - ty\|^2 \geq 0,$$

et donc $-2t\langle x - y | z_0 - y \rangle + t^2\|z_0 - y\|^2 \geq 0$. Comme $t \neq 0$:

$$-2\langle x - y | z_0 - y \rangle + t\|z_0 - y\|^2 \geq 0.$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient, pour tout $z_0 \in C$:

$$\langle x - y | z_0 - y \rangle \leq 0.$$

Cela achève la preuve. □

Corollaire 2. Cas d'un sous-espace vectoriel (fermé).

Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H . Alors, $H = F \oplus F^\perp$.

PREUVE : Déjà, si $x \in F \cap F^\perp$, on a $\langle x | x \rangle = 0$, donc $x = 0_H$.

Ensuite, soit $x \in H$. F est un sous-espace vectoriel fermé de H . Il est donc convexe, fermé et non vide.

Remarques 3.

F est bien convexe puisque, si $(x, y) \in F^2$ et $t \in [0, 1]$, on a $tx \in F$ et $(1 - t)y \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel de H). Par somme, $tx + (1 - t)y \in F$.

On a montré que tout (sous-)espace vectoriel est convexe.

D'après le théorème de projection sur un convexe fermé, il existe un unique $p_F(x) \in F$ tel que $\|x - p_F(x)\| = d(x, F)$. De plus, pour tout $z \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, puisque F est un sous-espace vectoriel de H , $\lambda z + p_F(x) \in F$, et :

$$\begin{aligned} \langle (\lambda z + p_F(x)) - p_F(x) | p_F(x) - x \rangle &= \langle \lambda z | p_F(x) - x \rangle \\ &= \lambda \langle z | p_F(x) - x \rangle \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

par la caractérisation du théorème précédent. Comme cela est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\forall z \in F \quad \langle z | p_F(x) - x \rangle = 0,$$

ce qui prouve que $x - p_F(x) \in F^\perp$. On a donc écrit $x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp}$, ce qui achève la preuve. □

Remarques 4.

[1] Si $H = \mathbb{R}^n$ (c'est le cas dans la leçon 181), alors tout sous-espace vectoriel de H est automatiquement fermé. Dans ce cas, il n'y a pas besoin de supposer F fermé.

[2] La caractérisation montrée dans le théorème a une interprétation géométrique : elle dit que, en notant $y = p_C(x)$, l'angle formé par les vecteurs $z - y$ et $x - y$ est obtus, pour tout $z \in C$, comme l'illustre la figure ci-contre.

