

Développement : Formule de STIRLING par les intégrales de WALLIS

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [GX] GOURDON X., *Les maths en tête - Analyse - 2^{ème} édition*, ellipses, 2008, p211.

Pour la partie sur les intégrales de WALLIS : p126 (indiqué p211).

Pour les leçons :

- 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
- 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Le but de ce développement est de démontrer **la formule de STIRLING** :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Définition 1.

On définit la suite des intégrales de WALLIS $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx.$$

Lemme 1.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}, \quad W_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

PREUVE : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $u : x \mapsto -\cos(x)$, $v : x \mapsto \sin^{n+1}(x)$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ avec :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad u'(x) = \sin(x) \quad ; \quad v'(x) = (n+1) \cos(x) \sin^n(x).$$

En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [u(x)v(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u(x)v'(x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} (n+1) \cos^2(x) \sin^n(x) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) (1 - \sin^2(x)) dx \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+1)W_n$, ce qui donne $W_{n+2}(n+2) = (n+1)W_n$.

Finalement :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

On en déduit le résultat par récurrence, avec $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.

□

Lemme 2.

On a la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{2p(2p-1) \cdots 2}{(2p-1)(2p-3) \cdots 1} \right)^2 = \pi.$$

PREUVE : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \leq \sin^{2p+1}(x) \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x).$$

Par croissance de l'intégrale, $0 \leq W_{2p+1} \leq W_{2p} \leq W_{2p-1}$ et, avec les calculs du lemme précédent :

$$1 \leq \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} \leq \frac{W_{2p-1}}{W_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}.$$

Donc :

$$W_{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} W_{2p+1},$$

d'où la formule d'après le résultat du lemme précédent. $\square$

Théorème 3. Formule de STIRLING.

On a la formule de STIRLING :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

PREUVE : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}; v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln \left(\frac{(n+1)^{n+1} e^{-n-1} \sqrt{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{n!}{n!} \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) \\ &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Or, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente (série de RIEMANN, $2 > 1$). Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge.

En outre, pour $N \in \mathbb{N}^*$ avec $N \geq 2$, on a, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{N-1} v_k = \sum_{k=1}^{N-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_N) - \ln(u_1).$$

On en déduit que $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, convergent (et la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement positive). Notons alors $\frac{1}{\ell}$ la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, de sorte que :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell n^n e^{-n} \sqrt{n}. \quad (1)$$

Il reste à déterminer ℓ . D'après le lemme précédent :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{2p(2p-2) \cdots 2}{(2p-1)(2p-3) \cdots 1} \right)^2 = \pi.$$

D'autre part, grâce au travail précédent,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \left(\frac{2p(2p-2) \cdots 2}{(2p-1)(2p-3) \cdots 1} \right)^2 &= \frac{1}{p} \left(\frac{2^p p!}{\prod_{k=1}^p (2k-1)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p} \frac{2^{4p} \ell^4 p^{4p} e^{-4p} p^2}{\ell^2 (2p)^{4p} e^{-4p} 2p} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell^2}{2}. \end{aligned}$$

Par unicité de la limite :

$$\frac{\ell^2}{2} = \pi,$$

et donc, comme $\ell > 0$:

$$\ell = \sqrt{2\pi},$$

ce qui achève la preuve avec (1). $\square$