

Développement : Théorème de DIXON

ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE

Références :

- ★ Pour le lemme : [BER] BERHUY G., *Algèbre : le grand combat*, 2^{ème} édition, Calvage et Mounet, 2018, p176.
- ★ Pour le théorème : [LES] LESESVRE D., MONTAGNON P., *131 développements pour l'oral*, Dunod, 2020, p10.

Pour les leçons :

- 101 : Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
- 104 : Groupes finis. Exemples et applications.
- 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Lemme 1. Formule de BURNSIDE.

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E . On note Ω l'ensemble des orbites de E sous l'action de G .

Alors, $|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$, où $\text{Fix}(g) = \{x \in E \mid g \cdot x = x\}$, pour $x \in E$.

PREUVE : Soit $C = \{(g, x) \in G \times E \mid g \cdot x = x\}$. On va calculer $|C|$ de deux façons différentes.

→ D'une part, on a $C = \bigsqcup_{x \in E} \{(g, x) \mid g \in G \text{ et } g \cdot x = x\} = \bigsqcup_{x \in E} \text{Stab}_G(x) \times \{x\}$. Donc :

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{x \in E} |\text{Stab}_G(x) \times \{x\}| \\ &= \sum_{x \in E} |\text{Stab}_G(x)| \\ &= \sum_{x \in E} \frac{|G|}{|\mathcal{O}_x|}, \end{aligned}$$

où, pour $x \in E$, $\mathcal{O}_x$ est l'orbite de x sous l'action de G .

Mais $E = \bigsqcup_{x \in E} \mathcal{O}_x$, et si $\omega \in \Omega$, $\mathcal{O}_x = \omega$ pour tout $x \in \omega$. Donc :

$$\begin{aligned} |C| &= |G| \sum_{x \in E} \frac{1}{|\mathcal{O}_x|} \\ &= |G| \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \frac{1}{|\omega|} \\ &= |G| \sum_{\omega \in \Omega} 1 \\ &= |G| |\Omega|. \end{aligned}$$

→ Ensuite, on a $C = \bigsqcup_{g \in G} \{(g, x) \mid x \in E \text{ et } g \cdot x = x\} = \bigsqcup_{g \in G} \{g\} \times \text{Fix}(g)$. Donc :

$$|C| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|,$$

ce qui achève la preuve. □

Théorème 2. de DIXON.

Soit G un groupe non abélien d'ordre n . On note k le nombre de classes de conjugaison de G et $p(G)$ la probabilité que deux éléments de G tirés uniformément et indépendamment commutent.

Alors, $p(G) = \frac{k}{n} \leq \frac{5}{8}$.

PREUVE : On fait agir G sur lui-même par conjugaison.

★ ÉTAPE 1 : Montrons que $p(G) = \frac{k}{n}$. D'après la formule de BURNSIDE :

$$k = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|,$$

avec, pour $g \in G$, $\text{Fix}(g) = \{x \in G \mid gx = xg\} =: C_x$ (centralisateur de x).

Soit $A = \{(x, g) \in G^2 \mid xg = gx\}$. Alors, $p(G) = \frac{|A|}{n^2}$ (par définition).

On écrit alors :

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |C_x| \\ &= \frac{1}{n} |\{(x, g) \in G^2 \mid xg = gx\}| \\ &= \frac{1}{n} |A| \\ &= np(G). \end{aligned}$$

Donc :

$$p(G) = \frac{k}{n}.$$

★ ÉTAPE 2 : Montrons que $[G : Z(G)] \geq 4$, où $Z(G)$ est le centre de G .

Comme G n'est pas abélien, il existe $x \in E$ tel que $C_x \neq G$. On a donc $[G : C_x] \geq 2$.

Ensuite, on a $Z(G) < C_x$, et $Z(G) \neq C_x$, car $x \notin Z(G)$. Donc $[C_x : Z(G)] \geq 2$.

Donc :

$$[G : Z(G)] = [G : C_x][C_x : Z(G)] \geq 4.$$

Donc :

$$[G : Z(G)] \geq 4.$$

Donc $|Z(G)| \leq \frac{|G|}{4}$.

★ ÉTAPE 3 : Montrons que $p(G) \leq \frac{5}{8}$.

Si $x \in G$, on sait que $x \in Z(G)$ si, et seulement si $C_x = G$. Donc :

$$x \notin Z(G) \iff [G : C_x] \geq 2 \iff |C_x| \leq \frac{1}{2}|G|.$$

En outre :

$$\begin{aligned} |A| &= \left| \bigsqcup_{x \in G} C_x \right| \\ &= \sum_{x \in G} |C_x| \\ &= \sum_{x \in Z(G)} |C_x| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} |C_x| \\ &= \sum_{x \in Z(G)} |G| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} |C_x| \\ &\leq |G||Z(G)| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} \frac{1}{2}|G| \\ &\leq \frac{|G|}{2}(2|Z(G)| + |G| - |Z(G)|) \\ &\leq \frac{|G|}{2}(|G| + |Z(G)|) \\ &\stackrel{\text{ÉTAPE 2}}{\leq} \frac{|G|}{2} \left(|G| + \frac{|G|}{4} \right) \\ &\leq \frac{5n^2}{8}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$p(G) = \frac{|A|}{n^2} \leq \frac{5}{8},$$

ce qui achève la preuve. □